



UPSSSC – PET

प्रारंभिक पात्रता परीक्षा (PET)

उत्तर प्रदेश अधीनस्थ सेवा चयन आयोग (UPSSSC)

भाग - 2

गणित, तार्किक योग्यता एवं सामान्य विज्ञान

विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
1	संख्या पद्धति	1
2	प्रतिशत	12
3	सरलीकरण	17
4	घातांक व करणी	21
5	औसत	24
6	समय और कार्य	28
7	अनुपात, समानुपात और विचरण	32
8	लाभ और हानि	36
9	बट्टा और बेईमान दुकानदार	40
10	डेटा इंटरप्रिटेशन	43
11	क्रम और रैंकिंग	54
12	बैठक व्यवस्था	58
13	पहेली परीक्षण	62
14	रक्त संबंध	67
15	असमानता	74
16	कैलेंडर	77
17	घडी	80
18	कथन और तर्क	84
19	कथन और निष्कर्ष	89
20	कथन और कार्यवाही	94
21	कथन और धारणा	98
22	कूट भाषा परीक्षण	103
23	निर्णय एवं समस्या समाधान	107

विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
24	जीव विज्ञान	112
25	भौतिक शास्त्र	147
26	रसायन शास्त्र	161

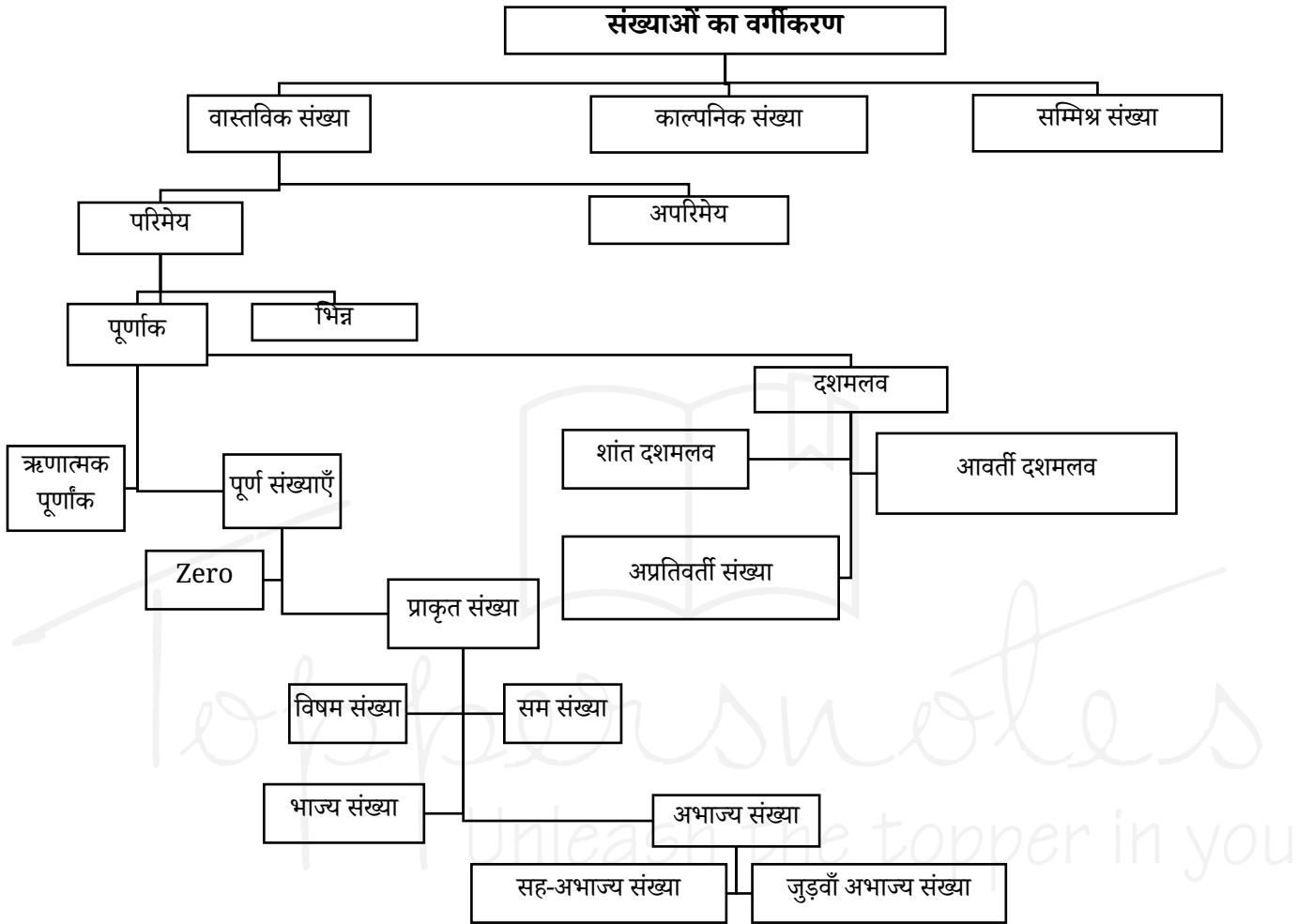
1

CHAPTER

संख्या पद्धति



➤ **संख्या पद्धति** : संख्या पद्धति, संख्याओं को दर्शाने और उनके साथ काम करने की एक ऐसी विधि है जिसमें प्रतीकों और नियमों के एक परिभाषित समूह का उपयोग किया जाता है।



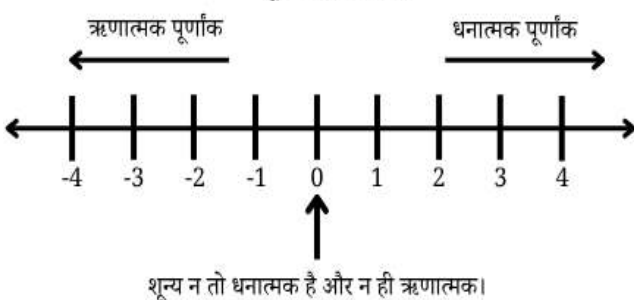
Types	Definition
वास्तविक संख्या	एक वास्तविक संख्या कोई भी ऐसी संख्या होती है जिसे संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है। वास्तविक संख्या एक ऐसी संख्या है जिसमें सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ शामिल होती हैं, और जिसे संख्या रेखा पर एक बिंदु के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
परिमेय संख्या	एक परिमेय संख्या वह संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

अपरिमेय संख्या	एक अपरिमेय संख्या वह संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।
भिन्न	भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी पूर्ण वस्तु के एक भाग को, या दो राशियों के अनुपात को दर्शाती है। इसे $\frac{a}{b}$ के रूप में लिखा जाता है।
पूर्णांक	एक पूर्णांक एक पूर्ण संख्या होती है जो धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकती है, और इसमें कोई भिन्नात्मक या दशमलव भाग शामिल नहीं होता।

ऋणात्मक पूर्णांक	ऋणात्मक पूर्णांक वे पूर्ण संख्याएँ हैं जिनके साथ ऋणात्मक चिह्न होता है, जैसे -1, -2, -3, ...	भाज्य संख्या	भाज्य संख्या एक ऐसी प्राकृत संख्या है जो 1 से बड़ी होती है और जिसके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं। एक भाज्य संख्या को 1 से, स्वयं से, और कम से कम किसी एक अन्य संख्या से पूरी तरह विभाजित किया जा सकता है। 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14... <ul style="list-style-type: none"> ➤ सबसे छोटी भाज्य संख्या 4 है। ➤ 9 सबसे छोटी विषम भाज्य संख्या 9 है। यदि a और b कोई दो विषम अभाज्य संख्याएँ हैं, तो $a^2 + b^2$ और $a^2 - b^2$ भाज्य संख्याएँ होती हैं।
पूर्ण संख्या	पूर्ण संख्या एक ऋणेतर पूर्णांक है, जिसमें शून्य भी शामिल है।	सह-अभाज्य संख्याएँ	दो या दो से अधिक संख्याओं को सह-अभाज्य (या सापेक्षतः अभाज्य) कहा जाता है, यदि उनका एकमात्र उभयनिष्ठ गुणनखंड (HCF) 1 हो। <ul style="list-style-type: none"> ➤ 1 न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या।
प्राकृत संख्या	प्राकृतिक संख्याएँ वे संख्याएँ हैं जो 1 से शुरू होती हैं और हर बार 1 से बढ़ती जाती हैं। 1, 2, 3, 4,...	जुड़वां अभाज्य संख्याएँ	जुड़वां संख्याएँ (जुड़वां अभाज्य) अभाज्य संख्याओं का एक ऐसा जोड़ा होती हैं, जिनका अंतर ठीक 2 होता है। <ul style="list-style-type: none"> ➤ 5 ही एकमात्र ऐसी अभाज्य संख्या है, जो 2 जुड़वां अभाज्य जोड़ों में शामिल है। (3, 5) (5, 7) ➤ जुड़वां अभाज्य संख्याओं का योग (3 और 5 को छोड़कर) हमेशा 12 से विभाज्य होता है।
विषम संख्या	एक विषम संख्या वह प्राकृत संख्या है जो 2 से विभाज्य नहीं होती, अथवा $2n + 1$ के रूप में होती है।	दशमलव संख्या	दशमलव संख्या एक ऐसी संख्या होती है जिसमें एक दशमलव बिंदु (.) होता है, और जो एक पूर्ण भाग तथा एक भिन्नात्मक भाग से मिलकर बनी होती है। उदाहरण- 3.5, 12.75 आदि।
सम संख्याएँ	एक सम संख्या वह प्राकृत संख्या है जो 2 से पूरी तरह विभाज्य होती है, या $2n$ के रूप में होती है।	शांत दशमलव	एक ऐसी दशमलव संख्या है जो दशमलव बिंदु के बाद अंकों की एक निश्चित संख्या के बाद समाप्त हो जाती है। उदाहरण- 2.5, 0.75
अभाज्य संख्या	अभाज्य संख्या एक ऐसी प्राकृत संख्या है जो 1 से बड़ी होती है और जिसके ठीक दो अलग-अलग गुणनखंड होते हैं: 1 और वह संख्या स्वयं। 2, 3, 5, 7. <ul style="list-style-type: none"> ➤ 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है। ➤ 2 एकमात्र सम अभाज्य संख्या है। ➤ सभी अभाज्य संख्याओं (2 और 3 को छोड़कर) को $6n + 1$ या $6n + 5$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है; हालाँकि, इसका विलोम सत्य नहीं है। ➤ (3, 5, 7) तीन अभाज्य संख्याओं का एकमात्र ऐसा समूह है, जो लगातार विषम संख्याएँ हैं। ➤ 101 तीन अंकों की सबसे छोटी अभाज्य संख्या है। ➤ 997 तीन अंकों की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है। 		

अशांत आवर्ती दशमलव	एक अशांत आवर्ती दशमलव वह दशमलव संख्या है जो कभी समाप्त नहीं होती, और जिसमें दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंक लगातार दोहराए जाते हैं। उदाहरण- 0.333..., 0.1212
अशांत अनावर्ती दशमलव	एक अनन्त और अनावर्ती दशमलव वह दशमलव संख्या है जो कभी समाप्त नहीं होती और दशमलव बिंदु के बाद कोई भी अंक या पैटर्न दोहराती नहीं है। उदाहरण- 1.1412, 3.14
काल्पनिक संख्या	काल्पनिक संख्या वह संख्या होता है जिसे $= bi$ के रूप में लिखा जा सकता है b एक वास्तविक संख्या है i काल्पनिक इकाई है, जिसे इस तरह से परिभाषित किया गया है
सम्मिश्र संख्या	एक सम्मिश्र संख्या वह संख्या है जिसके दो भाग होते हैं—एक वास्तविक भाग और एक काल्पनिक भाग—और जिसे मानक रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है: $z = a + ib$ a -वास्तविक संख्या, जिसे z का वास्तविक भाग कहा जाता है। b एक वास्तविक संख्या है, जिसे z का काल्पनिक भाग कहा जाता है। i काल्पनिक इकाई है, जिसे इस गुणधर्म द्वारा परिभाषित किया जाता है:

पूर्णांक संख्या रेखा



अभाज्य संख्या तो पता करना

➤ यह पता लगाने के लिए कि कोई संख्या अभाज्य है या नहीं, सबसे पहले उसका वर्गमूल (square root) निकालें और उसे निकटतम पूर्ण संख्या तक पूर्णांकित (round down) करें। फिर यह जाँचें कि क्या वह संख्या इस मान तक की किसी भी अभाज्य संख्या से विभाज्य है। यदि वह उनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है, तो वह संख्या एक अभाज्य संख्या है।

के बीच	अभाज्य संख्या
1-50	15
1-100	25
1-200	46

रामानुजन संख्या

रामानुजन संख्या एक ऐसी संख्या है जिसे दो अलग-अलग तरीकों से, दो धनात्मक घनों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसे हार्डी-रामानुजन संख्या या टैक्सी-कैब संख्या के नाम से भी जाना जाता है।

सबसे छोटी रामानुजन संख्या = 1729

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

पूर्ण संख्या

पूर्ण संख्या एक ऐसी प्राकृत संख्या है जो अपने उचित भाजकों (अर्थात्, स्वयं उस संख्या को छोड़कर उसके सभी धनात्मक भाजकों) के योग के बराबर होती है।

उदा: 4, 1 और 2 से विभाज्य है, इसलिए $1 + 2 = 3 \neq 4$; अतः, 4 एक पूर्ण संख्या नहीं है।

6, 1, 2 और 3 से विभाज्य है, इसलिए $1 + 2 + 3 = 6 = 6$; अतः, 6 एक पूर्ण संख्या है।

Key points

सम + सम = सम

सम × सम = सम

सम + विषम = विषम

सम × विषम = विषम

विषम + विषम = सम

विषम × विषम = सम

Type 1: परिभाषाओं पर आधारित प्रश्न



उदा: 173 एक अभाज्य संख्या है या नहीं

हल: 173 का वर्गमूल लगभग 13 है। 13 से कम या उसके बराबर अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7, 11 और 13 हैं। चूँकि 173 किसी भी संख्या से विभाज्य नहीं है, इसलिए यह एक अभाज्य संख्या है।

उदा: x, y और z तीन अलग-अलग अभाज्य संख्याएँ हैं, जहाँ $x < y < z$ है। यदि $x + y + z = 70$ हो, तो z का मान क्या होगा?

हल: यहाँ, योग 70 है, जिसका अर्थ है कि इन संख्याओं में से कम से कम एक संख्या सम (even) है। जैसा कि हम जानते हैं, केवल एक ही सम अभाज्य संख्या होती है, और वह है 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या भी है।

इसका अर्थ है कि $x = 2$

अब, $70 - 2 = 68 = y + z$

विभिन्न अभाज्य संख्याओं के मान रखकर देखने पर हमें परिणाम प्राप्त होता है:

$y = 31$ और $x = 37$

उदा: 53 से 97 के बीच कितनी भाज्य (composite) संख्याएँ हैं?

हल: यदि हम 53 और 97 के बीच की कुल पूर्णांक संख्याएँ ज्ञात करें और फिर उनमें से अभाज्य संख्याओं की संख्या घटा दें, तो हमें भाज्य संख्याओं की संख्या प्राप्त हो जाएगी।

कुल संख्या = $97 - 53 + 1 = 45$ (+1 तब जोड़ा जाता है जब दोनों संख्याओं को शामिल किया जाता है)

53 से 97 के बीच कुल अभाज्य संख्याएँ 10 हैं।

अतः, भाज्य संख्याएँ = $45 - 10 = 35$

उदाहरण: निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

- (A) सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक होती हैं।
- (B) सभी वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय होती हैं।
- (C) परिमेय संख्याएँ वास्तविक नहीं होतीं।
- (D) पूर्णांक परिमेय नहीं होते।

हल: अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याओं का एक उपसमुच्चय (subset) होती हैं, इसलिए सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक होती हैं।

सभी वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय नहीं होतीं;

परिमेय संख्याएँ भी वास्तविक होती हैं।

परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ ही होती हैं।

पूर्णांक परिमेय संख्याओं का एक उपसमुच्चय होते हैं,

क्योंकि किसी भी पूर्णांक को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा

सकता है (उदाहरण के लिए, $5 = \frac{5}{1}$)

अतः, सही उत्तर (A) है।

Special concept: खास तरह की संख्याओं के अंकों के योग पर आधारित

संख्या	वर्ग	अंको का योग
11^2	121	3
111^2	12321	9
So, on		
111111111^2	1234567898 7654321	81

उदा: एक 9-अंकों वाली संख्या का हर अंक 1 है। इसे उसी संख्या से गुणा किया जाता है। इससे जो संख्या बनती है, उसके अंकों का योग क्या होगा?

हल: concept का प्रयोग करने पर

$111111111^2 = \gg 81$

Type 2: इकाई अंको पर

आधारित प्रश्न



किसी व्यंजक का इकाई अंक ज्ञात करने के लिए, पूरे व्यंजक का मान निकालने के बजाय केवल संख्याओं के इकाई के अंकों पर विचार करें।

$(a + b)$ इकाई अंक = a का इकाई अंक + b का इकाई अंक

$(a - b)$ इकाई अंक = a का इकाई अंक - b का इकाई अंक

$(a \times b)$ इकाई अंक = a का इकाई अंक \times b का इकाई अंक

उदा: 435×433 का इकाई अंक ज्ञात कीजिए

हल:

$a \times b$ का इकाई अंक = a का इकाई अंक \times b का इकाई अंक

$5 \times 3 = 15$, इसलिए इकाई अंक 5 है।

चक्रीयता

संख्या प्रणाली में चक्रीयता का अर्थ है अंकों या शेषफलों का वह दोहराया जाने वाला पैटर्न, जो तब बनता है जब किसी संख्या को उच्च घातों तक बढ़ाया जाता है। इकाई का अंक सभी घातों के लिए अपरिवर्तित रहता है।

$$0 \rightarrow 0 \quad 1 \rightarrow 1$$

$$5 \rightarrow 5 \quad 6 \rightarrow 6$$

2 की चक्रीयता: इकाई का अंक दो मानों के बीच बारी-बारी से बदलता है।

$$4 \rightarrow 4, 6$$

जब घात विषम होती है, तो इकाई का अंक 4 होता है, और जब घात सम होती है, तो इकाई का अंक 6 होता है।

$$9 \rightarrow 9, 1$$

जब घात विषम होती है, तो इकाई का अंक 9 होता है, और जब घात सम होती है, तो इकाई का अंक 1 होता है।

4 की चक्रीयता: इकाई का अंक चार घातों के बाद दोहराता है।

$$2 \rightarrow 2, 4, 8, 6 \quad 3 \rightarrow 3, 9, 7, 1$$

$$7 \rightarrow 7, 9, 3, 1 \quad 8 \rightarrow 8, 4, 2, 6$$

माना, $N = x^y$

(N) का इकाई अंक ज्ञात करने के लिए, हमें केवल आधार संख्या (x) के इकाई अंक पर विचार करने की आवश्यकता होती है। किसी घातीय व्यंजक का इकाई अंक, घात को 4 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात करके निर्धारित किया जा सकता है।

Type 3: चक्रीयता -अंकगणितीय

समीकरणों पर आधारित इकाई

के अंक पर आधारित प्रश्न



उदा: यदि $x = (164)^{169} + (333)^{337} - (727)^{726}$

x का इकाई अंक ज्ञात कीजिए?

हल: इस व्यंजक में, पहले पद में 4 की घात विषम है, इसलिए पहले पद का इकाई का अंक 4 है। दूसरे पद के लिए, 337 को 4 से भाग देने पर शेषफल 1 आता है, इसलिए दूसरे पद का इकाई का अंक 3 है। तीसरे पद के लिए, 726 को 4 से भाग देने पर शेषफल 2 आता है; अतः, तीसरे पद का इकाई का अंक 9 है।

इसलिए, व्यंजक का इकाई का अंक $4 + 3 - 9 = -2$ है।

यदि इकाई का अंक ऋणात्मक आता है, तो सही इकाई का अंक प्राप्त करने के लिए उसमें 10 जोड़ दें। इकाई का अंक $10 - 2 = 8$ है।

उदा: $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + 20^5$ का इकाई का अंक ज्ञात कीजिए

हल: प्रत्येक पद में, चक्रीयता 1 है। इसलिए, प्रत्येक पद के लिए, इकाई का अंक वही होता है जो स्वयं उस संख्या का होता है।

1 से 10 तक की संख्याओं के लिए इकाई का अंक शून्य होता है।

$$= (1 + 2 + 2.. + 9 + 0)$$

$$+ (1 + 2 + 3.. + 9 + 0) = 0$$

उदा: $x = 187^{280} \times 529^{320} \times 343^{236}$ का इकाई का अंक ज्ञात कीजिए

हल: यदि शेषफल 0 आता है, तो घात को 4 के बराबर मान लें।

पहले के पद के लिए -7^4 की चक्रीयता 1

दूसरे पद के लिए -9 की घात सम है, इसलिए इकाई का अंक 1 है।

तीसरे पद के लिए -3^4 की चक्रीयता 1

$$\text{इकाई का अंक} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

उदा: व्यंजक का इकाई का अंक $(57242)^{9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1}?$

हल: हम केवल अंक 2 की जाँच करते हैं। घात को 4 से विभाजित किया जाएगा।

$$= 2^{1 \times (-1) \times 1 \times (-1) \times 1} = 2^1$$

अतः इकाई का अंक = 2

Type 4: गिनती पर आधारित प्रश्न (कोई

अंक, पृष्ठ या key stokes की

गिनती)



$$1 \text{ to } 9 \rightarrow \text{आवश्यक अंक} = 9$$

$$10 \text{ to } 99 \rightarrow 90 \times 2 = 180$$

उदा: 428 पृष्ठों वाली एक पुस्तक की नंबरिंग करने के लिए कितने अंकों की आवश्यकता होगी?

हल : 1 to 9 → आवश्यक अंक = 9

10 to 99 → $90 \times 2 = 180$

100 से 428 = $(428-100+1) = 329 \rightarrow 329 \times 3 = 987$

आवश्यक अंकों की कुल संख्या = $9 + 180 + 987 = 1176$

Type 5: पूर्ण वर्ग पर आधारित



प्रश्न

यह कैसे जांचें कि कोई संख्या पूर्ण वर्ग है या नहीं (यह केवल संभावना दर्शाता है)

1. किसी भी पूर्ण वर्ग संख्या के अंतिम दो अंक 1 से 24 तक की संख्याओं के वर्गों में से ही होने चाहिए।
2. इकाई का अंक 2, 3, 7 या 8 नहीं होना चाहिए।
3. संख्या और उसके हर (denominator) में शून्यों की संख्या सम (even) होनी चाहिए।
4. किसी पूर्ण वर्ग संख्या को 9 से भाग देने पर शेषफल 0, 1, 4 या 7 ही आना चाहिए।

उदा: क्या यह संभव है कि 562576 एक पूर्ण वर्ग संख्या हो?

हल: संख्या का अंत 76 से होता है, जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या के लिए संभव है। इकाई का अंक 6 है, इसलिए इस संख्या के पूर्ण वर्ग होने की संभावना है।

562576 के अंकों का योग = 21

9 से भाग देने पर शेषफल 3 आता है।

अतः, यह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है।

Type 6: दशमलव को भिन्न में



बदलना

➤ हर में शून्यों की संख्या, दशमलव बिंदु के बाद आने वाले अंकों की संख्या के बराबर होती है।

$$0.\overline{abc} = \frac{abc}{1000}$$

➤ हर में 9 की संख्या, दशमलव बिंदु के बाद आने वाले अंकों की संख्या के बराबर होती है।

$$0.\overline{abc} = \frac{abc}{999}$$

➤ जब कुछ अंकों पर ओवरलाइन (overline) नहीं होता है

$$0.\overline{abc} = \frac{abc - a}{990}$$

$$0.\overline{abcd} = \frac{abcd - ab}{9900}$$

➤ मिश्रित अवधारणा

$$a.\overline{bcd} = a + \frac{bcd - b}{990} = \frac{abcd - ab}{990}$$

उदा: यदि $A = 0.3\overline{12}$, $B = 0.4\overline{15}$ और $C = 0.30\overline{9}$ तो दिए गये व्यंजक का मान $A + B + C$.

हल:

$$A + B + C = \frac{312 - 3}{990} + \frac{415 - 4}{990} + \frac{309 - 30}{900}$$

$$A + B + C = \frac{720}{999} + \frac{279}{900}$$

$$A + B + C = \frac{10269}{9900} = \frac{1141}{1100}$$



Type 7: शून्यो की संख्या

➤ किसी संख्या के अंत में आने वाले शून्य, उसके गुणनखंडन में 10 की संख्या से निर्धारित होते हैं; यह मुख्य रूप से 5 और 2 के जोड़ों पर आधारित होता है।

➤ फैक्टोरियल एक गणितीय संक्रिया है जो गैर-ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए परिभाषित है।

➤ किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए, n का फैक्टोरियल (जिसे $n!$ से दर्शाया जाता है) 1 से लेकर n तक के सभी धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल होता है।

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$0! = 1, 1! = 1$$

✓ 4! के बाद आने वाली संख्याओं का इकाई अंक शून्य होता है।

✓ 4! और उसके बाद आने वाले सभी फैक्टोरियल 4 से विभाज्य होते हैं।

✓ 'n' क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल n से विभाज्य होता है।

➤ फैक्टोरियल में निहित संख्या की घात: $n!$ में निहित किसी अभाज्य संख्या 'p' की उच्चतम घात निम्न प्रकार दी जाती है:

$$= \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

➤ n क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सदैव $n!$ से विभाज्य होता है।

उदा: तीन संख्याएँ 24, 25 और 26 किससे विभाज्य हैं?

हल: n क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सदैव n! से विभाज्य होता है।

अर्थात् 24, 25, 26, 3! से विभाज्य हैं।

उदा: 100! में अंत में आने वाले शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: 100! में 2 के गुणनखंड प्रचुर मात्रा में होते हैं, इसलिए हम केवल 5 के गुणनखंडों की गणना करते हैं।

5 का प्रत्येक गुणज, 5 का कम से कम एक गुणनखंड प्रदान करता है। 25, 50, 75, 100 जैसी संख्याओं में 5 का एक अतिरिक्त गुणनखंड होता है, क्योंकि $25 = 5^2$ होता है।

$$\left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{25}\right] + \left[\frac{100}{125}\right] = 20 + 4 + 0 = 24$$

अंत में आने वाले शून्यों की संख्या = 24

उदा: $2 \times 4 \times 6 \dots \times 250$ में अंत में आने वाले शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: 2 के गुणनखंड बहुत ज़्यादा हैं, इसलिए हम सिर्फ 5 के गुणनखंडों को गिनेंगे।

$$2 \times 4 \times 6 \dots \times 250 = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \dots (2 \times 125) \times 125$$

$$(2 \times 1) \times (2 \times 2) \dots (2 \times 125) = 2^{125} (1 \times 2 \times \dots \times 125)$$

$$2^{125} (1 \times 2 \times \dots \times 125) = 2^{125} \times 125!$$

$$\left[\frac{125}{5}\right] + \left[\frac{125}{25}\right] + \left[\frac{125}{125}\right] = 25 + 5 + 1 = 31$$

अंत में आने वाले शून्यों की संख्या = 31

विभाज्यता

संख्या	विभाज्यता का नियम
2	अंतिम अंक 0, 2, 4, 6, 8 हो
3	अंकों का योग 3 से विभाज्य हो
4	अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 4 से विभाज्य हो
5	अंतिम अंक 0 या 5 हो
25	अंतिम दो अंक 00 हों या 25 से विभाज्य हों
6	संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य हो
7	अंतिम अंक का दुगुना शेष संख्या में से घटाएँ; परिणाम 7 से विभाज्य हो

8	अंतिम तीन अंक 8 से विभाज्य हों
9	अंकों का योग 9 से विभाज्य हो
11	सम और विषम स्थानों पर स्थित अंकों के योग का अंतर 0 हो या 11 से विभाज्य हो

Special cases

$$1. 1001 = 7 \times 11 \times 13$$

$$1001 \times abc = abcabc$$

$$2. 10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$$

$$10101 \times ab = ababab$$

Type 8: विभाज्यता के नियमों



पर आधारित प्रश्न

उदा: एक संख्या N, 9 को 99 बार लिखकर बनाई जाती है। यदि N को 13 से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: जब कोई संख्या n बार दोहराई जाती है, तो 6-अंकों की संख्या का संयोजन 7, 11 और 13 से विभाज्य होता है।

96 बार लिखा गया 9, 13 से विभाज्य होगा, और केवल तीन 9 शेष बचेंगे।

$$= \frac{999}{13} \Rightarrow R \rightarrow 11$$

उदा: (a + b) का वह सबसे बड़ा संभव मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए 8-अंकों की संख्या 143b203a, 15 से विभाज्य हो।

हल: 3 की विभाज्यता - यदि इसके अंकों का योग 3 से विभाज्य हो।

5 की विभाज्यता - यदि अंतिम अंक 0 या 5 हो, तो पूरी संख्या 5 से विभाज्य होती है।

15 के गुणनखंड = (3×5) ; अतः, संख्या 3 और 5 दोनों से विभाज्य होनी चाहिए।

इसलिए, a का मान 0 या 5 हो सकता है। लेकिन, क्योंकि प्रश्न में सबसे बड़ा मान पूछा गया है, इसलिए a का मान 5 ही होना चाहिए।

$$\text{इसके बाद, संख्या के अंकों का} = 18 + b$$

$$\text{सबसे बड़े मान के लिए} = b = 9$$

$$\text{अतः, } (a + b) = (9 + 5) = 14$$

उदा: यदि 9-अंकों की संख्या $72x8431y4$, 36 से विभाज्य है, तो y के सबसे छोटे संभव मान के लिए $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए; जहाँ x और y प्राकृत संख्याएँ हैं।

हल: 36 की विभाज्यता का नियम यह है कि संख्या 4 और 9 दोनों से विभाज्य होनी चाहिए।

अंतिम दो अंकों की संख्या = $y4$; $y = 2$ रखने पर, अंतिम दो अंकों की संख्या 24 हो जाती है।

इसलिए, y का मान = 2 है। (y सबसे छोटा संभव मान है)

9 से विभाज्यता के नियम के अनुसार,

संख्या का योग = $31 + x$

अतः, $x = 5$

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{5}\right) = 2\frac{1}{10}$$



Type 9: व्यंजकों की विभाज्यता

व्यंजक	'n' विषम हो	'n' सम हो
$x^n - y^n$	$(x - y)$	$(x + y)(x - y)$
$x^n + y^n$	$(x + y)$	Can't say

उदा: यदि $(17^{26} - 11^{26})$ को 42 से भाग दिया जाये तो शेषफल क्या होगा?

हल: n सम है. अतः, $(x + y)(x - y)$

$$= \frac{(17 + 11)(17 - 11)}{42} = \frac{28 \times 6}{42},$$

शेषफल = 0

Key Point: यदि 'n' विषम है और $a, b, c \dots z$ क्रमागत प्राकृत संख्याएँ हैं तो $(a^n + b^n + \dots + z^n)$, $(a + b + c \dots z)$ से विभाज्य होगा

उदा: $11^5 + 12^5 + 13^5$ किससे विभाज्य है ?

हल: $11+12+13 = 36$

इसलिए, यह व्यंजक 36 से विभाज्य है।



Type 10: अंक और उसका

विपरीत रूप (2-अंकीय और 3-अंकीय)

1. 2 अंकों वाली संख्या के लिए:

माना, मूल दो अंको वाली संख्या = $10x + y$,

विपरीत संख्या = $10y + x$

दोनों संख्याओं का योग

$$(10x + y) + (10y + x) = 11(x + y)$$

दोनों संख्याओं का अंतर

$$(10x + y) - (10y + x) = 9(x - y)$$

2. 3-अंकों वाली संख्या के लिए:

मान, सैकड़े का अंक = x , दहाई का अंक = y ,

इकाई का अंक = z

मूल संख्या = $100x + 10y + z$

सैकड़े और इकाई के अंकों को आपस में बदलने पर,

नई संख्या = $100z + 10y + x$

दोनों संख्याओं का अंतर = $99(x - z)$

उदा: दो-अंकों वाली किसी संख्या और उसके अंकों को आपस में बदलने पर प्राप्त संख्या का योग 99 है। यदि अंकों का अंतर 1 है, तो वह संख्या क्या है?

हल: माना, संख्या = $10x + y$

$$(10x + y) + (10y + x) = 99$$

$$x + y = 9$$

$$x - y = 1$$

समीकरण हल करने पर $x = 5, y = 4$

अतः, संख्या है = $10 \times 5 + 4 = 54$

उदा: संख्या $23x45678$ को 22 से विभाज्य बनाने के लिए रिक्त स्थान में भरी जाने वाली सबसे छोटी प्राकृत संख्या क्या होगी?

हल: 22 के लिए विभाज्यता का नियम 2 और 11 दोनों से विभाज्यता पर आधारित है। कोई संख्या 11 से तब विभाज्य होती है, जब उसके विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य हो।

विषम स्थानों का योग: $3 + 4 + 6 + 8 = 21$

सम स्थानों का योग: $2 + x + 5 + 7 = 14 + x$

$$21 - (14 + x) = 7 - x$$

$$7 - x = 11k, \quad \text{जहाँ } k \text{ कोई पूर्णांक है}$$

x के सबसे छोटे मान के लिए, मान लीजिए $k = 0$

$$7 - x = 0 \Rightarrow x = 7$$

अतः, x का वह सबसे छोटा मान जो संख्या $23x45678$ को 22 से विभाज्य बनाता है, 5 है।

उदा: 700 से 950 तक (दोनों को मिलाकर) ऐसी कितनी संख्याएँ हैं, जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं?

हल:

न तो 3 से विभाज्य और न ही 7 से

$$= \text{कुल संख्याएँ} - (3 \text{ या } 7 \text{ से विभाज्य संख्याएँ})$$

$$= \text{कुल} - [N(3) + N(7) - N(21)]$$

कुल संख्याएँ 700 से 950 = 251

$$3 \text{ से विभाज्य} = \frac{251}{3} \approx 83$$

$$7 \text{ से विभाज्य} = \frac{251}{7} \approx 35$$

$$21 \text{ से विभाज्य} = \frac{251}{21} \approx 11$$

अभीष्ट संख्या

$$= 251 - (83 + 35 - 11) = 144$$

गुणनखंडन

किसी संख्या का गुणनखंड (factor) एक पूर्ण संख्या होती है, जिसे किसी दूसरी पूर्ण संख्या से गुणा करने पर मूल संख्या प्राप्त होती है। दूसरे शब्दों में, एक गुणनखंड उस संख्या को पूरी तरह से विभाजित कर देता है और कोई शेषफल नहीं बचता।

$$\text{माना } N = a^p \times b^q \times c^r$$

- गुणनखंडों की कुल संख्या = $(p + 1)(q + 1)(r + 1)$
- सम गुणनखंडों की कुल संख्या = $p(q + 1)(r + 1)$
- विषम गुणनखंडों की कुल संख्या = $(q + 1)(r + 1)$
- सभी गुणनखंडों का योग = $(a^0 + a^1 + \dots + a^p)(b^0 + b^1 + \dots + b^q)(c^0 + c^1 + \dots + c^r)$
- सम गुणनखंडों का योग = $(2^1 + 2^2 + \dots + 2^p)(b^0 + b^1 + \dots + b^q)(c^0 + c^1 + \dots + c^r)$
- विषम गुणनखंडों का योग = $2^0(b^1 + b^2 + \dots + b^q)(c^1 + c^2 + \dots + c^r)$
- गुणनखंडों का औसत = $\frac{\text{गुणनखंडों का योग}}{\text{गुणनखंडों की संख्या}}$
- गुणनखंडों के व्युत्क्रमों का योग = $\frac{\text{गुणनखंडों का योग}}{\text{दी गई संख्या}}$
- अभाज्य गुणनखंडों की संख्या = $p + q + r$
- विशिष्ट अभाज्य गुणनखंडों की संख्या = गुणनखंडों में मौजूद अभाज्य संख्याओं की संख्या
- भाज्य संख्याओं की संख्या = कुल - विशिष्ट अभाज्य संख्याएँ - 1
- प्रत्येक संख्या के धनात्मक और ऋणात्मक गुणनखंड होते हैं
- (अभाज्य संख्या)² के रूप वाली सभी संख्याओं के 3 गुणनखंड होते हैं।

Type 11: गुणनखंडों की



संख्या ज्ञात करना

उदा: $N = 3600$ के लिए सभी प्रकार के गुणनखंड और सभी प्रकार के गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } N = 3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

- कुल गुणनखंडों की संख्या = $5 \times 3 \times 3 = 45$
 - सम गुणनखंडों की संख्या
 $2 \times (1800) = 2(2^3 \times 3^2 \times 5^2)$
 $= 4 \times 3 \times 3 = 36$
 - विषम गुणनखंडों की संख्या = $3 \times 3 = 9$
 - अभाज्य गुणनखंडों की संख्या = $4 + 2 + 2 = 8$
 - विशिष्ट अभाज्य गुणनखंडों की संख्या (जो गुणनखंडन में दिखाई देते हैं) = $1 + 1 + 1 = 3$
 - भाज्य संख्याओं की संख्या = $45 - 3 - 1 = 41$
 - पूर्ण वर्ग = $(2^2)^2(3^2)^1(5^2)^1$
 $= 3 \times 2 \times 2 = 12$
 - पूर्ण घन = $(2^3)^1 = (1 + 1) = 2$
 - सभी गुणनखंडों का योग = $(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 12493$
 - सम गुणनखंडों का योग = $(2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 12090$
 - विषम गुणनखंडों का योग = $(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 403$
 - अभाज्य गुणनखंडों का योग = $2 + 3 + 5 = 10$
 - भाज्य संख्याओं का योग = कुल योग - (अभाज्य गुणनखंडों का योग + 1)
 $= 12493 - 10 - 1 = 12482$
 - पूर्ण वर्गों का योग = $(2^0 + 2^2 + 2^4)(3^0 + 3^2)(5^0 + 5^1) = 5460$
- उदा: $(4^{11} \times 5^5 \times 3^2 \times 13^2)$ व्यंजक में कुल अभाज्य गुणनखंड की संख्या ज्ञात कीजिए
- हल :
- $$(4^{11} \times 5^5 \times 3^2 \times 13^2) = 2^{22} \times 3^2 \times 5^5 \times 13^2$$
- अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या
- $$= 22 + 2 + 5 + 2 = 31$$

उदा: $(30^{16} \times 16^{18} \times 20^{21})$ के कितने गुणनखंड ऐसे जो पूर्ण वर्ग होने के साथ साथ पूर्ण घन भी है

$$\text{हल: } 30^{16} \times 16^{18} \times 20^{21} = 2^{130} \times 3^{16} \times 5^{37}$$

जब पूर्ण वर्ग या पूर्ण घन की जाँच करने के लिए कहा जाए, तो देखें कि क्या घात (power) 6 का गुणज है।

$$2^{130} \times 3^{16} \times 5^{37} \\ = 2^{126} \times 2^4 \times 3^{12} \times 3^4 \times 5^{36} \\ \times 5^1$$

$$2^{126} \times 2^4 \times 3^{12} \times 3^4 \times 5^{36} \times 5^1 \\ = (2^6)^{21} \times 2^4 \times (3^6)^2 \times 3^4 \\ \times (5^6)^6 \times 5^1$$

उन गुणनखंडों की कुल संख्या जो पूर्ण वर्ग और पूर्ण घन दोनों हैं = $(21 + 1)(2 + 1)(6 + 1) = 462$

उदा: संख्या $2^8 \times 3^6 \times 5^4 \times 10^5$ के कितने गुणनखंड 120 के गुणज है

$$\text{हल: } N = 2^8 \times 3^6 \times 5^4 \times 10^5 = 2^{13} \times 3^6 \times 5^9$$

$$\frac{N}{120} = \frac{2^{13} \times 3^6 \times 5^9}{2^3 \times 3^1 \times 5^1} = 2^{10} \times 3^5 \times 5^8$$

$$\text{गुणनखंडों की संख्या} = 11 \times 6 \times 9 = 594$$

शेषफल

मान कोई संख्या N है, जिसे भाजक D से भाग देने पर शेषफल R और भागफल Q आता है।

$$N = D \times Q + R$$

भाज्य = भाजक \times भागफल + शेषफल

यदि किसी संख्या a को n से भाग देने पर शेषफल r आता है, तो ka को n से भाग देने पर शेषफल kr आएगा।

यदि संख्याओं a और b को n से भाग देने पर क्रमशः शेषफल r_1 और r_2 आते हैं, तो

$$a + b \text{ को } n, \text{ से भाग देने पर शेषफल } r_1 + r_2$$

$$a \times b \text{ को } n, \text{ से भाग देने पर शेषफल } r_1 \times r_2$$

Type 12: शेषफल प्रमेय पर

आधारित प्रश्न

उदा: किसी संख्या को 52 से भाग देने पर शेषफल 45 आता है। यदि उसी संख्या को 13 से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: चूंकि 13, 52 का एक गुणज (multiple) है, इसलिए हम सीधे ही पहले वाले शेषफल को नए भाजक से भाग दे सकते हैं।

$$= \frac{45}{13} \Rightarrow R \rightarrow 6$$

उदा: किसी संख्या को 12 से भाग देने पर शेषफल 5 आता है। यदि उस संख्या के वर्ग को 8 से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: जब किसी संख्या पर कोई गणितीय संक्रिया (operation) की जाती है, तो वही संक्रिया उसके शेषफल पर भी की जा सकती है।

$$= \frac{5^2}{8} = \frac{25}{8} \Rightarrow R \rightarrow 1$$

उदा: यदि भाज्य 45 है, भाजक 8 है, और भागफल 5 है, तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } N = D \times Q + R$$

$$45 = 8 \times 5 + \text{शेषफल}$$

$$\text{शेषफल} = 45 - 40 = 5$$

Type 13: शेषफल की

महत्वपूर्ण अवधारणा



$$\frac{(x+a)^n}{x} \Rightarrow R \rightarrow a^n$$

$$\frac{(x+1)^n}{x} \Rightarrow R \rightarrow 1$$

$$\frac{(x-1)^n}{x} \Rightarrow R \rightarrow (1)^n$$

$$R = 1 \text{ जब } n - \text{सम हो}$$

$$R = -1 \text{ जब } n - \text{विषम हो}$$

Special case:

$$\frac{4}{6} \Rightarrow R \rightarrow 4$$

$$\frac{4^n}{6} \Rightarrow R \rightarrow 4$$

उदा: जब 2^{75} को 14 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

$$\text{हल: } \frac{2^{75}}{15} = \frac{(2^4)^{18} \cdot 2^3}{15} = \frac{(16-1)^{18} \times 8}{15} \Rightarrow R \rightarrow 8$$

उदा: यदि 2^{192} को 6 से विभाजित किया जाए,

तो शेषफल क्या होगा?

हल: अवधारणा का उपयोग करने पर

$$\frac{2^{192}}{6} = \frac{4^{96}}{6} \Rightarrow R \rightarrow 4$$

उदा: जब 37^{47} को 19 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

हल:

$$\frac{37^{47}}{19} = \frac{(38-1)^{47}}{19} \Rightarrow R \rightarrow -1$$

शेषफल ऋणात्मक नहीं हो सकता, इसलिए शेषफल को भाजक में से घटाया जाता है।

$$R \rightarrow -1 \Rightarrow R \rightarrow 19 - 1 = 18$$

Type 14: फर्मेट लिटिल प्रमेय



यदि $\frac{a^{p-1}}{p}$, $\Rightarrow R \rightarrow 1$

Conditions

1. P-अभाज्य संख्या है
2. a, P -सह-अभाज्य संख्या है

उदा: जब 21^{47} को 47 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

हल: 21 और 47 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं, इसलिए हम Fermat's little theorem का उपयोग कर सकते हैं।

$$\frac{21^{47}}{47} = \frac{21^{46} \times 21}{47} \Rightarrow R \rightarrow 21$$

Type 15: यूलर (टोसेंट) प्रमेय



[Euler's (totient) theorem]

$$\frac{A^X}{d} \Rightarrow R \rightarrow 1$$

जहाँ A और d – सह-अभाज्य

X – d से छोटी और d के सह-अभाज्य संख्याओं की संख्या।

$$X = d \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \dots \dots$$

जहाँ P^1 और P^2 , d के भिन्न अभाज्य गुणनखंड हैं।

उदा: यदि ϕ Euler's totient फलन, तो $\phi(92) = ?$.

$$\text{हल : } 92 = 2^2 \times 23$$

$$\phi(92) = 92 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{23}\right) = 44$$

उदा: 7^{82} को 11 से विभाजित किया जाये तो, R=?

हल: 7^{82} को 11 से भाग देने पर शेष राशि ज्ञात करने के लिए, हम फर्मेट प्रमेय का उपयोग कर सकते हैं, जो बताता है कि यदि p एक अभाज्य संख्या है और a एक पूर्णांक है जो p से विभाज्य नहीं है, तो

$$\phi(11) = 11 \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 10$$

82 को 10 से विभाजित किया जाता है, और शेषफल है

$$\frac{7^2}{11} \Rightarrow R \rightarrow 5$$

Type 16: विलसन प्रमेय

यदि P अभाज्य संख्या हो तो

$$\frac{(P-1)!}{P} \Rightarrow R \rightarrow P-1$$

$$\frac{(P-2)!}{P} \Rightarrow R \rightarrow 1$$



उदा: जब $568!$ को 569 से विभाजित किया जाएगा, तो शेषफल क्या होगा?

हल:

$$\frac{568!}{569} = \frac{(569-1)!}{P} \Rightarrow R \rightarrow 569 - 1 = 568$$

2

प्रतिशत



CHAPTER

परिभाषा

➤ प्रतिशत का शाब्दिक अर्थ है "सौ में से," और इसे % प्रतीक द्वारा दर्शाया जाता है। उदाहरण के लिए, 25 प्रतिशत का मतलब है 100 में से 25 भाग, अर्थात: $25\% = \frac{25}{100}$

भिन्न प्रतिशत चार्ट

भिन्न	प्रतिशत	प्रतिशत	भिन्न	प्रतिशत	प्रतिशत
1	100%	100%	$\frac{1}{16}$	6.25%	$6\frac{1}{4}\%$
$\frac{1}{2}$	50%	50%	$\frac{3}{8}$	37.5%	$37\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{3}$	33.33%	$33\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{8}$	62.5%	$62\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{4}$	25%	25%	$\frac{7}{8}$	87.5%	$87\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{5}$	20%	20%	$\frac{2}{3}$	66.66%	$66\frac{2}{3}\%$
$\frac{1}{6}$	16.66%	$16\frac{2}{3}\%$	$\frac{5}{6}$	83.33%	$83\frac{1}{3}\%$
$\frac{1}{7}$	14.28%	$14\frac{2}{7}\%$	$\frac{1}{25}$	4%	4%
$\frac{1}{8}$	12.5%	$12\frac{1}{2}\%$	$\frac{1}{40}$	2.5%	$2\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{9}$	11.11%	$11\frac{1}{9}\%$	$\frac{4}{5}$	80%	80%
$\frac{1}{11}$	9.09%	$9\frac{1}{11}\%$	$\frac{3}{4}$	75%	75%
$\frac{1}{12}$	8.33%	$8\frac{1}{3}\%$	$\frac{1}{19}$	5.26%	$5\frac{5}{19}\%$
$\frac{1}{15}$	6.66%	$6\frac{2}{3}\%$	$\frac{1}{20}$	5%	$\frac{1}{20}$

आधार भिन्नों से व्युत्पन्न भिन्न

➤ भिन्नों को विभिन्न भिन्नों से प्राप्त किया जा सकता है

1. $\frac{1}{7} = 14.28\%$ है तो $\frac{2}{7} = 14.28 \times 2 = 28.56\%$ 2. $\frac{1}{9} = 11.11\%$ है तो $\frac{2}{9} = 11.11 \times 2 = 22.22\%$

Type 1: प्रतिशत की मूल अवधारणा

1. प्रतिशत चिह्न हटाकर और मान को 100 से भाग देकर प्रतिशत को भिन्न या दशमलव में परिवर्तित किया जाता है।

$$14\frac{5}{8}\% = \frac{117}{8}\% = \frac{117}{8 \times 100} = \frac{117}{800}$$

2. x संख्या x का y% $y\% \text{ of } x = x \times \frac{y}{100}$

3. x को y का प्रतिशत व्यक्त करने के लिए, आवश्यक प्रतिशत होगा: $= \frac{x}{y} \times 100\%$



उदा: 0.09% of 25% of 1200 = ?

$$\text{हल:} = \frac{0.09}{100} \times \frac{25}{100} \times 1200 = 0.27$$

उदा: यदि x% का x + y% का y = 2% का xy, तो 2x का 3y कितना % है ?

हल:

$$\frac{x \times x}{100} + \frac{y \times y}{100} = \frac{2 \times xy}{100}$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

बीजगणितीय सूत्र से

$$(x - y)^2 = 0$$

$$x = y$$

$$\frac{3y}{2x} \times 100 = 150\%$$

उदा: शब्द "CONSONANT" में स्वर का प्रतिशत, व्यंजन के प्रतिशत से कितने प्रतिशत कम है?

हल: स्वर = 3 व्यंजन = 6

$$\% = \frac{3}{6} \times 100 = 50\%$$

उदा: A की आय B की आय से 25% अधिक है। B की आय, A की आय से कितने प्रतिशत कम है?

$$\text{हल: } 25\% = \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{c} A \quad B \\ +1 \\ 5 \rightarrow 4 \end{array}$$

$$\% = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$$

उदा: यदि एक भिन्न के अंश को 25 प्रतिशत बढ़ा दिया जाए और हर को 50 प्रतिशत घटा दिया जाए, तो प्राप्त भिन्न $\frac{2}{5}$ हो जाता है। मूल भिन्न क्या था?

हल:

$$\frac{N \times 125}{D \times 50} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{N}{D} = \frac{2}{25}$$

Type 2: क्रमिक प्रतिशत

परिवर्तन पर आधारित प्रश्न

➤ यदि x% और y% परिवर्तन क्रमिक रूप से होते हैं, तो कुल परिवर्तन %

$$\text{कुल \% परिवर्तन} = x + y + \frac{xy}{100}$$

➤ यदि x%, y% और z% परिवर्तन क्रमिक रूप से होते हैं, तो कुल परिवर्तन %

$$\text{कुल परिवर्तन \%} = x + y + z + \frac{xy + yz + zx}{100} + \frac{xyz}{10000}$$

➤ कमी के लिए ऋणात्मक चिह्न और वृद्धि के लिए धनात्मक चिह्न का प्रयोग करें।

उदा: एक संख्या को 25% बढ़ाया जाता है और फिर 20% घटाया जाता है। परिणामी संख्या मूल संख्या से कितने प्रतिशत कम या अधिक होगी?

हल:

$$\begin{aligned} \text{कुल परिवर्तन \%} &= 25 - 20 - \frac{25 \times 20}{100} = 5 - 5 \\ &= 0 \% \text{ परिवर्तन} \end{aligned}$$

उदा: एक स्कूटर की कीमत में क्रमशः 10%, 5% और 15% की वृद्धि होती है। स्कूटर की कीमत में कुल प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned} P \% &= 10 + 5 + 15 \\ &+ \frac{10 \times 5 + 5 \times 15 + 15 \times 10}{100} \\ &+ \frac{10 \times 5 \times 15}{10000} \\ &= 30 + 2.75 + 0.075 = 32.825\% \end{aligned}$$

Type 3: प्रतिशत वृद्धि/कमी पर

आधारित - श्रृंखला विधि



$$\text{अंतिम मूल्य} = \text{दिया गया मूल्य} \times \frac{100 \pm x}{100} \times \frac{100 \pm y}{100} \times$$

$$\frac{100 \pm z}{100} \dots \dots \dots$$

कमी के लिए ऋणात्मक चिह्न और वृद्धि के लिए धनात्मक चिह्न का प्रयोग करें।

उदा: एक संख्या, 200, को 25% बढ़ाया जाता है, फिर 20% घटाया जाता है, फिर से 40% बढ़ाया जाता है, और अंत में 10% घटाया जाता है। अंतिम संख्या क्या होगी?

हल:

$$200 \times \frac{125}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{140}{100} \times \frac{90}{100} = 252$$

Type 4: क्षेत्रफल और आयतन



पर आधारित प्रश्न

यदि किसी वृत्त की त्रिज्या, व्यास या परिधि; किसी समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा या ऊँचाई; किसी वर्ग की प्रत्येक भुजा, विकर्ण या परिधि; किसी घन या घनाभ की प्रत्येक भुजा; या किसी गोले या अर्धगोले की त्रिज्या या व्यास में $x\%$ की वृद्धि या कमी की जाती है, तो उसके क्षेत्रफल (या सतह क्षेत्र) में प्रतिशत वृद्धि या कमी

$$\text{प्रतिशत बदलाव} = 2x \pm \frac{x^2}{100}$$

- वृद्धि होने पर + का प्रयोग करें।
- उपयोग - जब कमी हो रही हो।

उदा: एक वर्ग की लंबाई और चौड़ाई में क्रमशः 30% और 20% की वृद्धि की जाती है। परिणामी आयत का क्षेत्रफल वर्ग के क्षेत्रफल से कितना अधिक है

हल:

Method 1: अनुपात से

	पुराना	नया
लम्बाई	10	13
चौड़ाई	5	6
क्षेत्रफल	25	39

+14

$$\% \text{ increase} = \frac{14}{25} \times 100 = 56\%$$

Method 2:

$$\text{कुल } \% \text{ परिवर्तन} = 30 + 20 + \frac{30 \times 20}{100} = 56\%$$

Type 5 आय - व्यय आधारित



प्रश्न

$$Z = X + Y \text{ (भारित औसत विधि)}$$

$$\text{आय} = \text{व्यय} + \text{बचत}$$

उदा: रीना अपनी आय का 20% बचाती है। यदि उसका खर्च 20% बढ़ जाता है और उसकी आय 29% बढ़ जाती है, तो उसकी बचत में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

हल:

$$\text{Method 1 } 20\% = \frac{1}{5}$$

$$5(I) = 4(E) + 1(S)$$

$$5 \times 29 = 4 \times 20 + 1 \times S$$

$$S = 65\%$$

Method 2

$$\text{माना, आय} = 500 \quad \text{बचत} = 100$$

$$\text{व्यय} = 400$$

$$\text{कुल आय} = 129\% \text{ of } 500 = 645$$

$$\text{नया व्यय} = 120\% \text{ of } 400 = 480$$

$$\text{नया बचत} = 645 - 480 = 165$$

$$\text{बचत में बढ़त} = \frac{165 - 100}{100} \times 100 = 65\%$$

Type 6: मूल्य - उपभोग



समायोजन सिद्धांत

$$Z = X \times Y$$

$$\text{व्यय} = \text{मूल्य} \times \text{उपभोग}$$

$$\text{मूल्य} \propto \frac{1}{\text{उपभोग}}$$

उदा: यदि किसी वस्तु की कीमत $26\frac{2}{3}\%$ बढ़ा दी जाती है, तो गृहस्थ को अपनी खपत को कितना प्रतिशत कम करना होगा, ताकि उसके खर्च में वृद्धि न हो?

$$\text{हल: } 26\frac{2}{3}\% = \frac{80}{3 \times 100} = \frac{4}{15}$$

शुरू में अंत में

$$\text{मूल्य} \quad 15 \quad : \quad 19$$

$$\text{उपभोग} \quad 19 \quad : \quad 15$$

$$\text{उपभोग में } \% \text{ परिवर्तन} = \frac{4}{19} \times 100$$

$$\% = 21\frac{1}{19}\%$$

उदा: चाय की कीमत में $14\frac{2}{7}\%$ की कमी के कारण साक्षी ₹120 में 4 किलो अधिक चाय प्राप्त कर सकती हैं। चाय का मूल मूल्य क्या है?

$$\text{हल: } 14\frac{2}{7}\% = \frac{1}{7}$$

शुरू में अन्त में

$$\text{मूल्य} \quad 7 \quad \quad \quad 6$$

$$\text{मात्रा} \quad 6 \quad \quad \quad 7$$

$$1 \text{ इकाई} \longrightarrow 4$$

$$\text{शुरू में मात्रा} = 6 \times 4 = 24$$

$$\text{वास्तविक मूल्य} = \frac{120}{24} = ₹5$$

Type 7: जनसंख्या पर आधारित प्रश्न

उदा: एक नगर की जनसंख्या पहले वर्ष में 20% बढ़ती है और दूसरे वर्ष में 10% घटती है। यदि वर्तमान में नगर की जनसंख्या 2,16,000 है, तो दो वर्ष पहले नगर की जनसंख्या कितनी थी?



हल:

माना 2 वर्ष पहले जनसंख्या = X

$$X \times \frac{120}{100} \times \frac{90}{100} = 216000$$

$$X = 2,00,000$$

Type 8: ताजे और सूखे फलों



पर आधारित प्रश्न

ताजे और सूखे फलों में, ठोस भाग (pulp) स्थिर रहता है।

उदा: ताजे फलों में 68% पानी होता है और सूखे फलों में 20% पानी होता है। तो 65 किलोग्राम ताजे फलों से कितने सूखे फल प्राप्त किए जा सकते हैं?

हल: पल्प की मूल मात्रा = पल्प की नया मात्रा

$$65 \times (100-68) \% = d \times (100-20) \%$$

$$d = 26\text{kg}$$

Type 9: आयकर पर आधारित प्रश्न

उदा: एक व्यक्ति की आय में ₹1800 की वृद्धि होती है और आयकर की दर 18% से घटकर 15% हो जाती है। दोनों ही मामलों में 30% आय कर मुक्त है। यदि दोनों ही मामलों में देय कर समान हो, तो प्रारंभिक आय ज्ञात कीजिए।



हल : $Tax_1 = Tax_2$

$$I \times 70\% \times 18\% = (I+1800) \times 70\% \times 15\%$$

$$I = 9000$$

Type 10: चुनाव पर आधारित प्रश्न

उदा: दो उम्मीदवारों के बीच हुए चुनाव में, विजयी उम्मीदवार को कुल वोटों का 55% प्राप्त हुआ और उसने 3,000 वोटों के अंतर से जीत हासिल की। कुल वोटों की संख्या ज्ञात कीजिए



हल: माना, कुल वोट = 100

$$\text{विजेता} = 55 \quad \text{हारने वाला} = 100 - 55 = 45$$

$$\text{वोटों का अंतर} = 55 - 45 = 10\%$$

$$10\% \longrightarrow 3000$$

$$100\% \longrightarrow 30,000$$

उदा: एक चुनाव में कुल वोटों में से 10% वोट अमान्य घोषित कर दिए गए। विजयी उम्मीदवार को कुल वोटों का 54% प्राप्त हुआ और उसने 4,320 वोटों के अंतर से जीत हासिल की। डाले गए कुल वोटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: अमान्य वोट = 10% मान्य वोट = 90%

विजेता को मिले वोट = कुल का 54%

$$\text{हारने वाले के वोट} = 90\% - 54\% = 36\%$$

$$\text{वोटों का अंतर} = 54\% - 36\% = \text{कुल वोटों के } 18\% = 4,320$$

$$\text{कुल वोट} = \frac{4320}{18} \times 100 = 24,000$$

उदा: दो उम्मीदवारों के बीच हुए चुनाव में 15 प्रतिशत मतदाताओं ने मतदान नहीं किया और 10 प्रतिशत वोट अमान्य पाए गए। विजयी उम्मीदवार को वैध वोटों का 55 प्रतिशत प्राप्त हुआ और उसने 6120 वोटों के बहुमत से जीत हासिल की। मतदाता सूची में पंजीकृत मतदाताओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : जब कुछ वोट डाले ही नहीं जाते और कुछ वोट अमान्य घोषित कर दिए जाते हैं, तो वैध वोटों की संख्या = 100.

विजेता = 55 % हारने वाले का वोट % = 45%

जीत का अंतर = 10%

$$10\% \longrightarrow 6120$$

$$100\% \longrightarrow 61200 \text{ (मान्य वोट)}$$

माना कुल वोट = x

$$x \times \frac{85}{100} \times \frac{90}{100} = 61200$$

$$x = 80000$$

उदा: दो उम्मीदवारों के बीच हुए चुनाव में 10% मतदाताओं ने मतदान नहीं किया और 75 वोट अमान्य पाए गए। विजयी उम्मीदवार को अपेक्षित कुल वोटों का 50% प्राप्त हुआ और उसने 170 वोटों के अंतर से चुनाव जीत लिया। मतदाता सूची में पंजीकृत कुल मतदाताओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल - माना कुल वोट = 100x

$$\text{डाले गये वोट} = 90x$$

$$\text{कुल मान्य वोट} = 90x - 75$$

$$\text{विजेता} = 50x \quad \text{हारने वाले के वोट} = 40x - 75$$

$$\text{जीत का अंतर} = 50x - (40x - 75) = 170$$

$$10x = 95$$

$$100x = 950$$

Type 11: कमीशन आधारित



प्रश्न

उदा: एक एजेंट को ₹10,000 तक की सभी बिक्री पर 5% कमीशन मिलता है और इस राशि से अधिक बिक्री पर 4% कमीशन मिलता है। वह अपनी कमीशन घटाकर ₹28,700 अपनी कंपनी को देता है। उसकी कुल बिक्री क्या है?

Sol:

Method 1 माना कुल बिक्री ₹ x

₹10,000 पर कमीशन

$$= 5\% \text{ of } 10,000 = ₹500$$

बची हुई बिक्री पर कमीशन

$$= 4\% \text{ of } (x - 10,000)$$

कुल कमीशन

$$= 500 + 0.04(x - 10,000)$$

$$= 0.04x + 100$$

कमीशन काटने के बाद दिया गया धन

$$= x - (0.04x + 100)$$

$$0.96x - 100 = 28,700$$

$$x = ₹30,000$$

Method 2



₹10,000

यदि कुल कमीशन 4% है, तो कंपनी को ₹10,000 पर 1% अधिक मिलता है।

तो, कंपनी को प्राप्त धन

$$= 28700 + 1\% \text{ of } 10000 = ₹28,800$$

₹28,800 कुल खरीदारी राशि का 96% दर्शाता है।

$$\text{कुल बिक्री} = \frac{28800}{96} \times 100 = ₹30,000$$

महत्वपूर्ण सूत्र

1. मान लीजिए कि एक मशीन का वर्तमान मूल्य P है, और इसका मूल्य प्रत्येक वर्ष $R\%$ की दर से घटता है, तो:

(i) 'n' वर्षों के बाद मूल्य

$$\text{मूल्य} = P \times \left(1 - \frac{R}{100}\right)^n$$

(ii) 'n' वर्षों के पहले मूल्य

$$\text{मूल्य} = \frac{P}{\left(1 - \frac{R}{100}\right)^n}$$

उत्तीर्ण अंक $x\%$ उत्तीर्ण अंक

यदि एक छात्र y अंक प्राप्त करता है और z अंकों से फेल हो जाता है, तो:

$$\text{अधिकतम अंक} = \frac{100(y + z)}{x}$$

2. दो छात्रों का केस (कुल अंक / अधिकतम अंक = $a\%$)

परीक्षा में

➤ पहला छात्र $b\%$ अंक प्राप्त करता है और x अंकों से पास/फेल होता है।

➤ दूसरा छात्र $c\%$ अंक प्राप्त करता है और y अंकों से पास/फेल होता है।

तब कुल अंकों (या अधिकतम अंकों) का प्रतिशत इस प्रकार निकाला जाता है:

➤ यदि दोनों का परिणाम समान हो (दोनों पास या दोनों फेल) → घटाएं (-)

➤ यदि परिणाम विपरीत हों (एक पास, एक फेल) → जोड़ें (+)

$$\text{कुल अंक} = \frac{xy}{|a - b|} \times 100$$

Rule: समान चिन्ह → subtract, विपरीत चिन्ह → add.

3. दो विषय (गणित और अंग्रेजी) प्रतिशत तथ्य

परीक्षा में

➤ $x\%$ उम्मीदवार गणित में पास/फेल होते हैं।

➤ $y\%$ उम्मीदवार अंग्रेजी में पास/फेल होते हैं।

➤ $z\%$ उम्मीदवार दोनों विषयों में पास/फेल होते हैं।

Case 1: वे उम्मीदवार जो किसी भी विषय में पास/फेल नहीं होते

$$= 100 - (x + y - z)\%$$

Case 2: वे उम्मीदवार जो केवल एक विषय में पास/फेल होते

$$= (x + y - 2z)\%$$