Toppersnotes
Unleash the topper in you

बिहार

होम गार्ड

सेंट्रल सिलेक्शन बोर्ड ऑफ कॉन्स्टेबल (CSBC)

भाग - 4

गणित

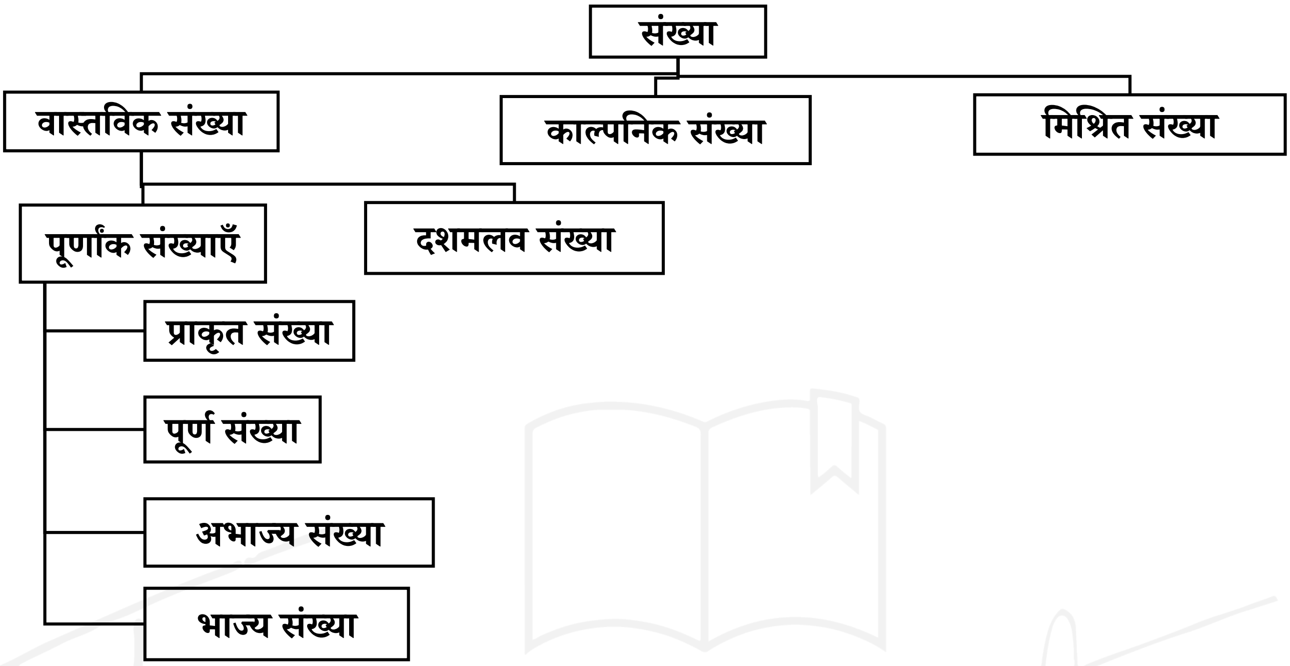
SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

1 CHAPTER संख्या पद्धति

संख्या : वह गणनात्मक प्रतीक हैं जो किसी वस्तु की मात्रा, स्थिति अथवा योग्यता को व्यक्त करता हैं ।

Z जर्मन शब्द Zehlen से लिया गया हैं, जिसका अर्थ हैं “गिनना “और zahl – जिसका अर्थ हैं “संख्या “

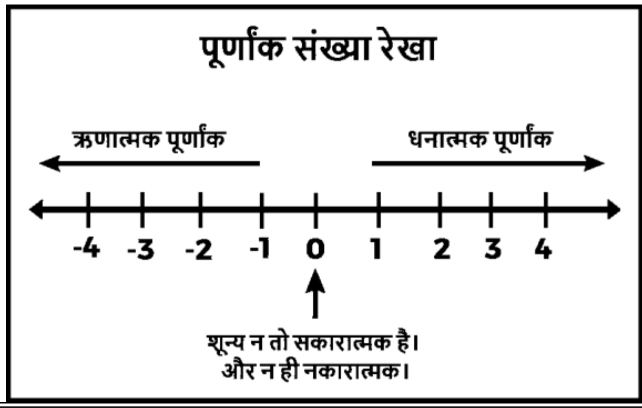


वास्तविक संख्याएँ

- वे सभी संख्याएँ जिन्हे संख्या रेखा मे दर्शाया जा सकता हैं ।
- वे संख्याएँ जिनका वर्ग धनात्मक हो ।
- सभी परिमेय और अपरिमेय संख्या वास्तविक संख्या होती हैं ।
- इन्हे R से प्रदर्शित किया जाता हैं ।

संख्या रेखा : एक सीधी रेखा पर क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रूप से संख्याओं का दृश्य निरूपण संख्या रेखा कहलाता है।

- शून्य (0) को संख्या रेखा का उद्गम (origin) माना जाता है।
- 0 के बाईं ओर ऋणात्मक (Negative) संख्याएँ होती हैं और 0 के दाईं ओर सभी धनात्मक (Positive) संख्याएँ होती हैं। इसलिए, संख्या रेखा पर दाईं ओर बढ़ने से संख्याओं का मान बढ़ता है।
- **ऋणात्मक और धनात्मक संख्या रेखा :** संख्या रेखा पर शून्य के बाईं ओर का भाग ऋणात्मक संख्या रेखा कहलाता है, जबकि दाईं ओर का भाग धनात्मक संख्या रेखा कहलाता है। इसे दोनों दिशाओं में अनंत तक बढ़ाया जा सकता है।
- संख्याएँ हमेशा समान अंतराल पर रखी जाती हैं।



काल्पनिक संख्याएँ : वे संख्याएँ जिन्हे संख्या रेखा पर प्रदक्षित नहीं किया जा सकता हैं ।

$$i = \sqrt{-1}$$

i को आयोटा (iota) से पदर्शित करते हैं ।

समिश्र संख्याएँ या मिश्रित संख्याएँ : वास्तविक संख्याओं और काल्पनिक के सम्मिश्रण से जो संख्या बनती हैं उसे समिश्र संख्या कहते हैं ।

Z = a (वास्तविक संख्या) + ib (काल्पनिक संख्या)

$$Z = a + ib$$

वास्तविक संख्याओं के प्रकार :

1. प्राकृत संख्या : गणन या गणना के लिए प्रयुक्त संख्याओं को प्राकृत संख्या कहते हैं । प्राकृत संख्याओं के समूह को N से व्यक्त किया जाता हैं ।

N = 1,2,3,4,5 … … … … … … … इत्यादि

✓ किसी प्राकृत संख्या में 1 जोड़ने पर उसकी परवर्ती व 1 घटाने पर उसका पूर्ववर्ती मिलता है।

$$\begin{aligned} 5 \text{ का परवर्ती } &= 5 + 1 \\ &= 6 \\ 5 \text{ का पूर्ववर्ती } &= 5 - 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

✓ प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक परवर्ती होता है। 1 को छोड़कर प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक पूर्ववर्ती होता है।

✓ पहली तथा सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 है।

✓ कोई भी संख्या सबसे बडी अथवा अंतिम प्राकृत संख्या नहीं है।

प्राकृत संख्या के गुण :

- दो प्राकृत संख्याओं का आपस में योग करने से या गुणा करने पर प्राकृत संख्या ही प्राप्त होती है।
- दो प्राकृत संख्याओं का आपस में व्यवकलन (घटाना) या भाग करने से सदैव प्राकृत संख्या प्राप्त नही होती है।
- दो प्राकृत संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ सकते हैं। दो प्राकृत संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा कर सकते हैं। अर्थात प्राकृत संख्याओं के लिए क्रमविनिमय का नियम योग व गुणन संक्रिया में लागू होता है जबकि घटाने एवं भाग संक्रिया पर लागू नहीं होता।
- प्राकृत संख्याओं के लिए साहचार्य नियम योग एवं गुणा संक्रिया में लागू होता है जबकि घटाने एवं भाग संक्रिया में लागू नहीं होता।
- प्राकृत संख्याओं के लिए गुणा का योग व अन्तर पर बंटन (वितरण) होता है।
- किसी प्राकृत संख्या में एक से गुणा या भाग करने पर संख्या का मान नहीं बदलता। इस प्रकार a, b, c तीन प्राकृत संख्याओं के लिए

1. (a + b) एक प्राकृत संख्या है।
2. $(a \times b)$ एक प्राकृत संख्या है।
3. a − b सदैव एक प्राकृत संख्या हो आवश्यक नहीं है।
4. $a \div b$ सदैव एक प्राकृत संख्या हो, जरूरी नहीं है।
5. $a + b = b + a$
6. $a \times b = b \times a$
7. a − b $\neq b - \alpha$ $\quad (a \neq b)$
8. $a \div b \neq b \div a$ $\quad (a \neq b)$
9. $a + (b + c) = (a + b) + c$
10. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
11. $a - (b - c) \neq (a - b) - c$
12. $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ $\quad (a \neq b \neq c \neq 1)$
13. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
14. $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$ $\quad [b > c]$
15. $q \times 1 = 1 \times q = q$
16. $a \div l = a$

2. पूर्ण संख्याएँ : प्राकृत संख्याओं के समूह में शून्य को शामिल कर लेने पर पूर्ण संख्याओं का समूह प्राप्त होता है। पूर्ण संख्याओं के समूह को W से प्रदर्शित करते हैं। अर्थात् W = 0,1,2,3,4,5,6, इत्यादि

- ✓ प्रत्येक पूर्ण संख्या का एक परवर्ती होता है। 0 को छोड़कर प्रत्येक पूर्ण संख्या का एक पूर्ववर्ती होता है।
- ✓ पहली तथा सबसे छोटी पूर्ण संख्या 0 है।
- ✓ कोई भी संख्या सबसे बड़ी अथवा अन्तिम पूर्ण संख्या नही है।
- ✓ सभी प्राकृत संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ भी हैं। लेकिन सभी पूर्ण संख्याएँ, प्राकृत संख्याएँ नहीं हैं।

पूर्ण संख्याओं के गुण :

- ➢ प्राकृत संख्याओं के सभी गुण पूर्ण संख्याओं के लिए भी सही हैं।
- ➢ किसी पूर्ण संख्या में शून्य को जोड़ने या घटाने पर संख्या का मान नहीं बदलता। शून्य को योग के लिए तत्समक अवयव (योज्य तत्समय अवयव) कहते हैं।
- ➢ किसी भी पूर्ण संख्या में 1 से गुणा करने पर संख्या का मान नही बदलता। 1 को गुणन के लिए तत्समक अवयव (गुणन तत्समक अवयव) कहते हैं।
- ➢ शून्य में किसी पूर्ण संख्या का भाग देने पर भागफल शून्य ही रहता है। जबकि किसी पूर्ण संख्या में शून्य से भाग देना अपरिभाषित है।

- यदि a और b दो पूर्ण संख्या हो तो
  - ✓ $a + b =$ पूर्ण संख्या
  - ✓ $a \times b =$ पूर्ण संख्या
  - ✓ $a - b \neq$ पूर्ण संख्या
  - ✓ $a \div b \neq$ पूर्ण संख्या
- यदि a,b और c तीन पूर्ण संख्याएँ हो तो -
  - ✓ **क्रमविनिमेयता का नियम :**
    - $a + b = b + a$
    - $a \times b = b \times a$
  - ✓ **साहचर्य का नियम :**
    - $(a + b) + c = a + (b + c)$
    - $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

3. **पूर्णांक संख्याएँ :** धनात्मक संख्याएँ, ऋणात्मक संख्याएँ और शून्य को मिलाने से बना संग्रह पूर्णांक संख्याओं का समूह होता है। पूर्णांक संख्याओं को I या Z द्वारा प्रदर्शित करते हैं। अर्थात्

   I = $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 12, 3, 4, 5$ आदि।

पूर्णांक संख्याओं के गुण (Properties of Integers)

- पूर्ण संख्याओं के सभी गुण पूर्णांक संख्याओं के लिए भी सही होते हैं।
- पूर्णांक संख्याओं के योग, अंतर व गुणा पर संवरक गुण (नियम) लागू होता है। अर्थात् दो पूर्णांकों का योग, अंतर व गुणा सदैव एक पूर्णांक संख्या होती है।
- पूर्णांक के भाग पर सदैव संवरक गुण लागू नही होता है अर्थात दो पूर्णांकों का भाग करने पर सदैव पूर्णांक संख्या नही मिलती है।
- दो धनात्मक पूर्णांको का योगफल सदैव धनात्मक पूर्णांक तथा दो ऋणात्मक पूर्णांको का योगफल सदैव ऋणात्मक पूर्णांक होता है।
- एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का योगफल धनात्मक पूर्णांक होगा यदि धनात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो तथा योगफल ऋणात्मक होगा यदि ऋणात्मक पूर्णांक का आंकिक मान अधिक हो।
- किसी ऋणात्मक संख्या का योज्य प्रतिलोम धनात्मक व धनात्मक संख्या का योज्य प्रतिलोम ऋणात्मक संख्या होती है।
- किसी धनात्मक पूर्णांक को किसी ऋणात्मक पूर्णांक के साथ गुणा करने पर गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
- दो धनात्मक पूर्णांको या दो ऋणात्मक पूर्णांको का गुणा करने पर धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
- शून्य को छोड़कर प्रत्येक पूर्णांक में उसी पूर्णांक का भाग देने भागफल हमेशा 1 आता है।
- शून्य को छोड़कर प्रत्येक पूर्णांक को उसके योज्य प्रतिलोम से भाग देने पर भागफल -1 प्राप्त होता है।
- शून्य का गुणन प्रतिलोम अस्तित्व नहीं रखता है।

4. परिमेय संख्याएँ : ऐसी संख्या परिमेय संख्या कहलाती है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता हो जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है तथा p को q से विभाजित करने पर भाग पूरा-पूरा जाता है अथवा दशमलव प्राप्त होता है। इन्हे Q से प्रदर्शित किया जाता हैं

- ✓ परिमेय संख्याओं में प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्याओं और पूर्णांक संख्याओं का समावेश होता है।
- ✓ किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती है।
- ✓ p और q का 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं हो सकता हैं अर्थात p और q सहअभाज्य संख्याएँ हैं ।
- ✓ प्रत्येक पूर्णांक m को $\frac{m}{1}$ के रूप मे लिखा जा सकता हैं ।

परिमेय संख्याओं के गुण :

- ➢ दो परिमेय संख्याओं का योग हमेशा एक परिमेय संख्या होता हैं । परिमेय संख्याएँ योग के अंतर्गत संवृत्त हैं ।
- ➢ दो परिमेय संख्याओं का अंतर हमेशा एक परिमेय संख्या होती हैं ।
- ➢ दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल हमेशा एक परिमेय संख्या होता हैं ।
- ➢ परिमेय संख्याओं के लिए $\frac{a}{0}$ परिभाषित हैं । शून्य को छोड़कर दूसरी सभी परिमेय संख्याओं का समूह भाग के अंतर्गत संवृत्त हैं ।
- ➢ यदि Q_1, Q_2 दो परिमेय संख्या हो तो
  - ✓ **क्रमविनिमेय का नियम –**
    - $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$
    - $Q_1 \times Q_2 = Q_2 \times Q_1$
  - ✓ **साहचर्य नियम**
    - $Q_1 + (Q_2 + Q_3) = (Q_1 + Q_2) + Q_3$
    - $Q_1 \times (Q_2 \times Q_3) = (Q_1 \times Q_2) \times Q_3$
  - ✓ परिमेय संख्याओं के लिए भाग साहचर्य नहीं हैं ।
  - ✓ परिमेय संख्याओं के लिए गुणन का योग पर वितरण नियम
    - $Q_1 \times (Q_2 + Q_3) = Q_1Q_2 + Q_1Q_3$
  - ✓ परिमेय संख्याओं के लिए योग के लिए शून्य तत्समक कहलाता हैं ।
    - $Q_1 + 0 = Q_1$
  - ✓ परिमेय संख्याओं के लिए 1 गुणात्मक तत्समक हैं ।
    - $Q_1 \times 1 = Q_1 = 1 \times Q_1$

5. अपरिमेय संख्याएँ : वे संख्याएँ जिन्हे यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में न लिखा जा सकता हो जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

उदाहरण - $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{237}\,, \sqrt{15}$

सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णत: विभाज्य हो सम संख्या कहलाती हैं ।

- nवां पद = 2n
- प्रथम n संख्याओं का योग = $n(n+1)$
- प्रथम n संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$
- $n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2}$

विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती हैं ।

- प्रथम n विषम संख्याओं का योग = = n^2
- $n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2}$

अभाज्य संख्याएँ : एक संख्या जिसके केवल दो ही गुणक होते हैं, 1 और वह स्वयं, उन्हे अभाज्य संख्या कहते हैं ।

जैसे = { 2,3,5,7,11, 13, 17, 19 ।।}

- जहां 1 अभाज्य संख्या नहीं हैं ।
- 2 एक मात्र सम संख्या हैं ।
- 3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा हैं ।
- 1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9
- 25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6
- 1 से 50 तक कुल 15 अभाज्य संख्या हैं ।
- 1 से 100 तक कुल अभाज्य संख्या = 25
- 1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46
- 1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62
- 1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78
- 1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

सह अभाज्य संख्या : वह संख्याएँ जिनका सिर्फ और सिर्फ एक गुणनखंड (HCF) सिर्फ 1 हो ।

उदाहरण – (15,22), (39, 40)

परफेक्ट संख्या : वह संख्या जिसके गुणनखंडों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखंडों मे स्वयं उस संख्या को छोड़कर)

6 → 1, 2, 3 → यहाँ 1 + 2 + 3 → 6

28 → 1, 2, 4, 7, 14 → 1 + 2 + 4 + 7 + 14 → 28

वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार :

शांत दशमलव (Terminating Decimal)	अशांत दशमलव (Non-Terminating Decimal)
$\frac{1}{2} = 0.5$ $1/4 = 0.25$ $1/3 = 0.125$ ↓ कुछ परिमित चरणों के बाद दशमलव प्रसार का अंत हो जाता है। ऐसी संख्याओ के दशमलव प्रसार को शांत दशमलव कहते हैं।. ↓ सारी संख्यायें परिमेय संख्यायें होगी। ↓ शेष शून्य हो जाता हैं ।	$1/3 = 0.3333 \dots.$ $1/7 = 0.14285714 \dots.$ ↓ कुछ चरणों के बाद शेष की पुनरावृत्ति होती हैं । जिससे दशमलव प्रसार निरंतर जारी रहता हैं । ↓ अपरिमेय संख्या ↓ शेष कभी भी शून्य नहीं हो सकता हैं ।

उदाहरण 1 : दिखाईए कि 2.152786 एक परिमेय संख्या है या 2.152786 को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : यहाँ $2.152786 = \frac{2152786}{1000000}$ है। अतः यह एक परिमेय संख्या है।

उदाहरण 2 : दिखाईए कि $0.8888 \dots = 0.\overline{8}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ p और q पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

हल : माना कि $x = 0.\overline{8}$

$$x = 0.8888$$

दोनों और 10 से गुणा करने पर

$$10x = 10 \times (.8888 \dots) = 8.888$$
$$10x = 8.888 \dots$$

समीकरण (i) को (ii) से घटाने पर

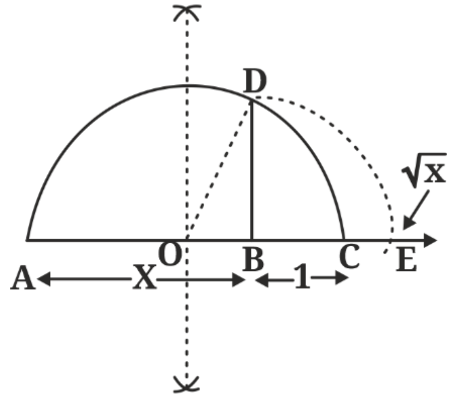
$$9x = 8$$
$$\Rightarrow x = \frac{8}{9}$$

वास्तविक संख्या का ज्यामितीय रूप मे निरूपण :

यदि a एक प्राकृत संख्या है, तब $\sqrt{a} = b$ का अर्थ है $b^2 = a$ और $b > 0$. यही परिभाषा धनात्मक वास्तविक संख्याओं पर भी लागू की जा सकती है। मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है तब $\sqrt{a} = b$ का अर्थ है $b^2 = a$ और $b > 0$ है।

अब हम दिखाएँगे कि किस प्रकार $\sqrt{x}$ को, जहाँ x एक दी हुई धनात्मक वास्तविक संख्या है ज्यामितीय रूप से ज्ञात किया जाता है।

$\sqrt{x}$ का मान ज्ञात करने के लिए जहाँ x एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, एक दी हुई रेखा पर एक स्थिर बिन्दु A से x दूरी पर चिह्न लगाने पर एक ऐसा बिन्दु B लेते है जिससे कि $AB = x$ हो जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। एक बिन्दु C मान लीजिए जिससे $BC = 1$ है।



आकृति में △ OBD एक समकोण त्रिभुज है।

अत: $OC = OD = OA = \frac{AB+BC}{2} = \frac{x+1}{2}$ एकक

$$OB = AB - OA = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2} \text{ एकक}$$

अतः बौधायन प्रमेय लागू करने पर यह प्राप्त होता है।

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

$$\Rightarrow BD^2 = x$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{x} \text{ है।}$$

वास्तविक संख्या पर संक्रियाएँ :

मान लीजिए a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं तब

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$

(iv) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d}) = \sqrt{ac} - \sqrt{ad} + \sqrt{bc} - \sqrt{bd}$

(v) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

(vi) $\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$

(vii) $\frac{1}{a+b\sqrt{x}} = \frac{a-b\sqrt{x}}{a^2-b^2x}$ जहाँ x एक प्राकृत संख्या है

(viii) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ जहाँ x तथा y प्राकृत संख्या है।

वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक नियम :

यहाँ a, n और m प्राकृत संख्याएं हैं।

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$
- $a^m b^m = (ab)^m$
- $(a)^0 = 1$
- $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

इनका कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है और $n > 0$ है। तब

(i) $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(ii) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\times p]{a^p}$

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और p और q परिमेय संख्याएँ है, तब

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

(ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

(iv) $a^p b^p = (ab)^p$

अंकगणित का मौलिक प्रमेय

- प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप मे व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता हैं। तथा यह गुणनखंडन अभाज्य गुणनखंडों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता हैं।
- प्रत्येक अभाज्य संख्या को केवल 1 और स्वयं से विभाजित किया जा सकता हैं और प्रत्येक पूर्णांक संख्या को अद्वितीय तरीके से अभाज्य संख्याओं के गुणनखंड के रूप मे लिखा जा सकता हैं।

परिभाषा : किसी भी प्राकृतिक संख्या को केवल एक ही प्रकार से अभाज्य संख्याओं के गुणनखंड के रूप मे लिखा जा सकता हैं। (क्रम को छोड़कर)

उदाहरण :

$30 = 2 \times 3 \times 5 \rightarrow$ यह केवल इन्ही अभाज्य संख्याओं से बना हैं।

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

महत्व :

- यह प्रमेय विभाजन और गुणा से जुड़े कई गणितीय समस्याओं को हल करने मे सहायक होता हैं।
- इससे लघुत्तम समापवर्तक और महत्तम समापवर्तक की गणना करना आसान हो जाता हैं।

  उदाहरण : 24 और 36 के अभाज्य गुणनखंड

  $24 \rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 3$

  $36 \rightarrow 2 \times 2 \times 3 \times 3$

महत्तम समापवर्तक : सामान्य अभाज्य गुणनखंड का न्यूनतम घातांक। संख्याओं मे संबंद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की सबसे बड़ी घात का गुणनखंड।

$HCF = 2^2 \times 3 = 12$

लघुत्तम समापवर्तक : सभी अभाज्य गुणनखंड का अधिकतम घातांक लिया जाता हैं। संख्याओं मे प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड की सबसे छोटी घात का गुणनफल।

$LCM = 2^3 \times 3^2 = 72$

HCF और LCM के मध्य संबंध: किन्ही दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए

$HCF\,(a,b) \times LCM\,(a,b) = a \times b$

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका :

यूक्लिड ग्रीक गणितज्ञ थे, ये ज्यामिति एवं संख्या सिद्धान्त पर किये कार्य के लिए जाने जाते हैं। इन्होंने वास्तविक संख्याओं के भागफल सम्बन्धित सिद्धान्त भी प्रतिपादित किये। संख्या गणित में यूक्लिड विभाजन विचि (कलन विचि) (Euclid's Division Algorithm), इनके द्वारा प्रतिपादित विभाजन प्रमेयिका पर आधारित है।

माना a कोई अशून्य पूर्णांक है $(a \neq 0)$ तथा b एवं c दो पूर्णांक निम्न प्रकार परिभाषित है कि

$$b/a = c$$

तब संख्या b भाज्य, संख्या a भाजक एवं संख्या c भागफल कहलाता है। भाजकता के लिए निम्न गुणधर्म ध्यान रखने योग्य है कि

(i) ± 1 से किसी भी अशून्य पूर्णांक संख्या में भाग लगाया जा सकता है।

(ii) 0 में किसी भी संख्या का भाग लगाया जा सकता है।

(iii) 0 से किसी संख्या को भाजित नहीं किया जा सकता।

(iv) यदि a एवं b में से कोई भी शून्य नहीं है तो इन पर भाग संक्रिया (भाजकता) लागू की जा सकती है।

(v) यदि a एवं b अशून्य पूर्णांक है तथा q एवं r अन्य पूर्णांक इस प्रकार है कि

$$a = bq + r$$

हमने पिछली कक्षाओं में भाग संक्रिया का अध्ययन किया है। हम जानते हैं कि एक धनात्मक पूर्णांक (माना a) को दूसरे धनात्मक पूर्णांक (माना b) से विभाजित करने पर भागफल (माना q) और शेषफल (माना r) प्राप्त होता है।

जहाँ,

$$0 \leq r < b$$

प्रक्रिया :

चरण 1 : दी गई दो संख्याओं a और b के लिए a = bq + r लिखे

चरण 2 : यदि r = 0, तो b ही महत्तम समापवर्तक होगा ।

चरण 3 : यदि $r \neq 0$ तो a और b से बदलकर और b को r से बदलकर दोबारा चरण 1 और चरण 2 को दोहराएँ जब तक कि r = 0 न मिल जाएँ ।

उदाहरण 1: दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक पूर्णांक $3q$ या $3q + 1$ या, $3q + 2$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल: माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा $b = 3$ है।

a एवं b में विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करने पर,

$a = 3q + r$ जहाँ $0 \leq r < 3$ तथा q कोई पूर्णांक है। $r = 0,1,2$ रखने पर

$a = 3q + 0$ जहाँ $a = 3q + 1$ या $a = 3q + 2$

अतः $a = 3q$, या $a = 3q + 1$ या $a = 3q + 2$

अतः कोई भी धनात्मक पूर्णांक $3q, 3q + 1, 3q + 2$ के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 2: दर्शाइए कि प्रत्येक धनात्मक समपूर्णांक $2q$ के रूप का होता है तथा प्रत्येक विषम पूर्णांक $2q+1$ के रूप का होता है जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल: माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा $b = 2$ है।

a एवं b में विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करने पर,

$a = 2q + r$ जहाँ $0 \leq r < 2$ तथा q कोई पूर्णांक है। $r = 0$ या 1 रखने पर

$a = 2q + 0$, या $a = 2q + 1$($\because r$ एक पूर्णांक है)

$a = 2q$, या $a = 2q + 1$

चूंकि q एक पूर्णांक है तथा $a = 2q$ है तो a एक सम पूर्णांक है।

हम जानते है कि कोई पूर्णांक या तो सम होगा या फिर विषम हो सकता है, अतः यदि a सम पूर्णांक है तो $a+1$ अर्थात् $2a+1$ कोई भी विषम पूर्णांक का रूप होगा।

उदाहरण 3: वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो 245 और 2053 को इस प्रकार विभाजित करती है कि प्रत्येक स्थिति में शेषफल 5 प्राप्त हो।

हल: दिया गया है कि 245 और 2053 को अभीष्ट संख्या से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल 5 प्राप्त होता है। अतः $245 - 5 = 240$ एवं $2053 - 5 = 2048$ अर्थात् 240 और 2048 को अभीष्ट संख्या द्वारा पूर्णतया विभाजित किया जा सकता है यह तभी संभव है जबकि अभीष्ट संख्या 240 एवं 2048 का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो। यह भी ज्ञात है कि अभीष्ट संख्या इस उभयनिष्ठ गुणनखण्ड में सबसे बड़ी संख्या है। अर्थात् अभीष्ट संख्या 240 एवं 2048 का महत्तम समापर्वक (HCF) होगी। अतः यूक्लिड विभाजन विधि का चरण बद्ध प्रयोग करने पर.

$$2048 = 240 \times 8 + 128$$
$$240 = 128 \times 1 + 112$$
$$128 = 112 \times 1 + 16$$
$$112 = 16 \times 7 + 0$$

स्पष्ट है कि अन्तिम शेषफल 0 प्राप्त हो गया है। इस प्रकार अभीष्ट महत्तम समापवर्तक भाजक 16 प्राप्त हुआ, जो कि अभीष्ट संख्या है।

संक्षेप में इस विभाजन प्रक्रिया को इस प्रकार समझा जा सकता है।

240|2048|8
1920
128|240|1
128
112|128|1
112
16|112|7
HCF = 112
0 = शेषफल

2 CHAPTER समिश्र संख्याएँ

उदा. $x^2+1=0$

$x=\sqrt{-1}$

यह वास्तविक संख्या में संभव नही है। जिसके लिए एक नई संख्या की परिकल्पना की जाती है। जिसे काल्पनिक इकाई (i) कहा जाता है।

$$i=\sqrt{-1}$$
$$i^2=-1$$

समिश्र संख्याएँ = वास्तविक भाग + काल्पनिक भाग

$$z=a+ib$$

वर्ष 1748 में, महान गणितज्ञ एल. ऑयलर ने संख्या '' को आयोटा (lota) नाम दिया, जिसका वर्ग -1 है। इस आयोटा अथवा 'i' को काल्पनिक इकाई के रूप में परिभाषित किया गया। नये संकेत चिन्ह 'i' के लेने से, हम ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूल को एक वास्तविक संख्या तथा 'i' के गुणनफल के रूप में प्रकट कर सकते हैं।

कोई भी संख्या, जिसे $a+bi$ के रूप में प्रकट किया जा सकता हो, जबकि a तथा b वास्तविक संख्याएँ एवं $i=\sqrt{-1}$ हो, एक सम्मिश्र संख्या कहलाती है।

एक सम्मिश्र संख्या को अक्षर z द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। अर्थात् $z=a+\mathrm{bi}$, ' a ' को z का वास्तविक भाग कहा जाता है, जिसे $\operatorname{Re}(a+bi)$ लिखा जाता है तथा b को z का काल्पनिक भाग कहा जाता है जिसे $\operatorname{Im}(a+bi)$ लिखा जाता है।

यदि $a=0$ तथा $b\neq 0$ हो, तो सम्मिश्र संख्या bi हो जाती है, जो कि एक पूर्णतः काल्पनिक सम्मिश्र संख्या है ।

उदाहरण : 'i' का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

(i) $\sqrt{-36}$

(ii) $\sqrt{25}\cdot\sqrt{-4}$

हल:

(i) $\sqrt{-36}=\sqrt{36(-1)}=6i$

(ii) $\sqrt{25}\cdot\sqrt{-4}=5\times 2i=10i$

i की धनात्मक पूर्णांकीय घात:

यदि n एक ऐसा धनात्मक पूर्णांक है कि $n>4$ है, तो i^n को ज्ञात करने के लिए हम पहले n को 4 से भाग देते हैं। उस दशा में, मान लीजिए कि m भागफल तथा r शेष मिलता है। तब,

$$n=4m+r \qquad \text{जहाँ } 0\leq r<4 \text{ है।}$$

इस प्रकार,

$$i^n=i^{(4m+r)}=i^{4m}\cdot i^r=(i^4)^m\cdot i^r=i^r\ (\because i^4=1)$$

किन्ही दो वास्तविक संख्याओं $\boldsymbol{a}$ तथा $\boldsymbol{b}$ के लिए, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ केवल उसी दशा में सत्य होगा जबकि a तथा b में से कम से कम एक शून्य अथवा धनात्मक हो।

वास्तव में, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \mathrm{i}\sqrt{a} \times \mathrm{i}\sqrt{b} = \mathrm{i}^2\sqrt{ab}$

$= -\sqrt{ab}$, जहाँ a तथा b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं।

उदाहरण : $1 + \mathrm{i}^{10} + \mathrm{i}^{20} + \mathrm{i}^{30}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$1 + \mathrm{i}^{10} + \mathrm{i}^{20} + \mathrm{i}^{30}$
$= 1 + (\mathrm{i}^2)^5 + (\mathrm{i}^2)^{10} + (\mathrm{i}^2)^{15} = 1 + (-1)^5 + (-1)^{10} + (-1)^{15}$
$= 1 + (-1) + 1 + (-1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$
इस प्रकार, $1 + \mathrm{i}^{10} + \mathrm{i}^{20} + \mathrm{i}^{30} = 0$

समिश्र संख्याओं पर आधारित प्रमेय :

प्रमेय 1 : यदि कोई सम्मिश्र संख्या शून्य के बराबर हो तो उसके वास्तविक व काल्पनिक दोनों भाग शून्य के बराबर होते हैं।

प्रमाण : माना $z = a + ib$ दी हुई सम्मिश्र संख्या है तथा दिया है $a + ib = 0$

$$\therefore\ a = -ib$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(a)^2 = (-ib)^2 = (-1)^2(i^2)b^2 = -b^2$$

या $a^2 + b^2 = 0$

किन्तु a और b दोनों वास्तविक संख्याएँ हैं; इसलिए इनके वर्गो का योगफल तब तक शून्य नहीं हो सकता, जब तक यह दोनों अलग-अलग शून्य के बराबर नहीं हो, अर्थात्

$$a = 0 \text{ और } b = 0$$

प्रमेय 2 : यदि दो सम्मिश्र संख्याऐं बराबर हों तो उनके वास्तविक और काल्पनिक भाग अलग-अलग बराबर होते हैं।

प्रमाण : माना $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ बराबर हैं।

अब $\quad z_1 = z_2$
$\Rightarrow \quad a + ib = c + id$
$\Rightarrow \quad (a - c) + i(b - d) = 0$
$a - c = 0$ और $b - d = 0$

$\Rightarrow\ a = c$ और $b = d$

अतः दो सम्मिश्र संख्याएँ बराबर तभी होती है जब उनके वास्तविक भाग एवं काल्पनिक भाग अलग-अलग बराबर हों।

उपप्रमेयः यदि $a + ib = c + id$ तो $a - ib = c - id$

समिश्र संख्याओं का बीजगणित :

$z_1 = a + ib$
$z_2 = c + id$
जहां

- a, b = वास्तविक संख्याएँ
- b, d = काल्पनिक भाग

1. समिश्र संख्याओं का योग :

$z_1 + z_2 = a + ib + c + id$
$= (a + c) + (b + d)i$

✓ **दो समिश्र संख्याओं का योग समिश्र संख्या होता हैं ।**

- **क्रमविनिमेय नियम :** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- **साहचर्य नियम :** $(\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}) + \boldsymbol{z_3} = \boldsymbol{z_1} + (\boldsymbol{z_2} + \boldsymbol{z_3})$
- **योगात्मक तत्समक का अस्तित्व हैं :** $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{z}$ → शून्य समिश्र संख्या → $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0i}$
- **योगात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व :**

$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$
$-\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{ib})$
$\boldsymbol{z} + (-\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ → योगात्मक प्रतिलोम अथवा $\boldsymbol{z}$ का ऋण कहलाता हैं ।

2. समिश्र संख्याओं का अंतर :

$z_1 - z_2 = a + ib - c - id$
$= (a - c) + (b - d)i$

3. समिश्र संख्याओं का गुणन :

मान लीजिए कि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$, दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं।

तब $z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

✓ क्योंकि दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल पुनः एक सम्मिश्र संख्या है, इसलिए सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय गुणन के लिए संवृत है।

✓ सम्मिश्र संख्याओं का गुणन क्रम विनिमेय होता है, अर्थात् $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

✓ सम्मिश्र संख्याओं का गुणन सहचारी होता है, अर्थात् $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

✓ किसी सम्मिश्र संख्या $z = (x + iy)$ के लिए एक ऐसी सम्मिश्र संख्या 1, अर्थात् $(1 + 0i)$, इस प्रकार कि $z.1 = 1.z = z$ होता है। यह संख्या 1 गुणन के लिए तत्समक अवयव कहलाती है।

✓ किसी शून्येतर सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ के लिए, एक सम्मिश्र संख्या $\frac{1}{z}$ है जिसके लिए $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$ होता है। $\frac{1}{z}, z$ का गुणनात्मक प्रतिलोम कहलाता है। अर्थात् $a + ib$ का गुणनात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ है।

✓ किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्या z_1, z_2 और z_3 के लिए,

तथा

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$
$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

अर्थात् सम्मिश्र संख्याओं के लिए गुणन, योग पर वितरित (या बंटित) है।

4. समिश्र संख्याओं का भाग :

मान लीजिए कि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ (शून्येत्तर)

दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब, $z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_3} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$

एक सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी

मान लीजिए कि $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है। तब इसके काल्पनिक भाग के चिन्ह को बदलने पर प्राप्त संख्या **सम्मिश्र संख्या z का संयुग्मी कहलाती** है तथा **इसे $\bar{z}$** से निर्दिष्ट किया जाता है, अर्थात् $\bar{z} = \boldsymbol{a - ib}$

z का योज्य प्रतिलोम $-a - ib$ है, जबकि इसका संयुग्मी $a - ib$ है।

1. $\overline{(\bar{z})} = z$
2. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z), z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$
3. $z = \bar{z}$, यदि z शुद्धतः वास्तविक संख्या है।
4. $z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z$ शुद्धतः काल्पनिक संख्या है।
5. $z \cdot \bar{z} = \{\mathrm{Re}(z)\}^2 + \{\mathrm{Im}(z)\}^2$
6. $(\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ और $(\overline{z_1 - z_2}) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
7. $(\overline{z_1 \cdot z_2}) = (\bar{z}_1) \cdot (\bar{z}_2)$ और $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(\bar{z}_1)}{(\bar{z}_2)}, (\bar{z}_2 \neq 0)$

एक सम्मिश्र संख्या का मापांक या निरपेक्ष

मान मान लीजिए कि $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है। तब, इसके वास्तविक भाग के वर्ग और काल्पनिक

- ✓ भाग के वर्ग के योग का धनात्मक वर्गमूल z का मापांक (निरपेक्ष मान) कहलाता है। और इसे $|z|$ से निर्दिष्ट किया जाता है, अर्थात् $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ✓ सम्मिश्र संख्याओं के एक समुच्चय में, $z_1 > z_2$ या $z_2 > z_1$ अर्थहीन है; परंतु
- ✓ $|z_1| > |z_2|$ या $|z_1| < |z_2|$ अर्थपूर्ण हैं; क्योंकि $|z_1|$ और $|z_2|$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

एक सम्मिश्र संख्या के मापांक के गुण

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, अर्थात् $\mathrm{Re}(z) = 0$ और $\mathrm{Im}(z) = 0$
2. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
3. $-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|$ और $-|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|$
4. $z\bar{z} = |z|^2, |z^2| = |\bar{z}|^2$
5. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} (z_2 \neq 0)$
6. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$
7. $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$
8. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
9. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

10. $|az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_2|^2 = (a^2 + b^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

विशेषत:

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

11. एक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib (\neq 0)$ का गुणनात्मक प्रतिलोम (व्युक्क्मि)

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

समिश्र संख्याओं का वर्गमूल :

मान लीजिए $a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है तथा $x + iy$ उसका वर्गमूल है।

तब

$$\sqrt{a + ib} = x + iy \Rightarrow a + ib = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को बराबर करने पर

$x^2 - y^2 = a$ .... (1)

तथा $2xy = b$ .... (2)

बीजगणितीय तत्समक का प्रयोग करने पर :

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (a)^2 + (b)^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (3)$$

समीकरण (1) तथा (3) के अनुसार :

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} + a \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a\right)} \\ \text{तथा } 2y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} - a \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

समीकरण (4) में, इस तरह x तथा y के मान के 4 युग्म पाते हैं और हम x तथा y के वही मान स्वीकार करेंगे जो समीकरण (1) तथा (2) दोनों को सन्तुष्ट करते हों।

समीकरण (2) में यदि ' b ' धनात्मक है तब x तथा y दोनों धनात्मक होंगे, अथवा दोनों ऋणात्मक होंगे।

$$\sqrt{a + ib} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right)}$$

$$\text{तथा } -\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right)}$$

यदि b ऋणात्मक है तो x तथा y विपरीत चिन्ह के होंगे, तब

$$\sqrt{a + ib} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 + b^2} - a\right)}$$

$$\text{तथा } \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right)}$$

अतः $a + ib$ के दोनों अवसरों पर दो-दो वर्गमूल विपरीत चिन्हों के होंगे।

उदाहरण : $7 + 24i$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\sqrt{7+24i} = a + ib$ .... (1)

दोनों ओर वर्ग करने पर, $7 + 24i = a^2 - b^2 + 2iab$, प्राप्त होता है। वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$a^2 - b^2 = 7$ .... (2)

तथा $2ab = 24 \Rightarrow ab = 12$ .... (3)

अतः $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 \Rightarrow (a^2+b^2)^2 = 49 + 4 \times 144$

$\Rightarrow (a^2+b^2)^2 = 625 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$ .... (4)

समीकरण (2) तथा (4), को हल करने पर

$$2a^2 = 32 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

तथा $2b^2 = 18 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$

समीकरण (3), $ab = 12$ धनात्मक है, अतः a तथा b समान चिन्हों के होंगे

यहाँ पर $a = 4, b = 3$ अथवा $a = -4, b = -3$ होंगे

अतः $7 + 24i$ के दो वर्गमूल $4 + 3i$ तथा $-4 - 3i$ होंगे।

i की घात :

$$i^3 = i^2(i) = (-1)i = -i$$
$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = (i^2)^2 \times i = (-1)^2 \times i = i$$

इस प्रकार किसी पूर्णांक k के लिये

$$i^{4k} = 1 \qquad i^{4k+1} = i$$
$$i^{4k+2} = -1 \qquad i^{4k+3} = -i$$

<u>इकाई के घनमूल (Cube roots of unity):</u>

माना $\sqrt[3]{1} = z$, तब $z^3 = 1$

$$\Rightarrow z^3 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$$
$$\Rightarrow (z-1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{ या } z^2 + z + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \text{ या}$$
$$\Rightarrow z = 1 \text{ या } z = \frac{-1 \pm \sqrt{(1-4)}}{2}$$
$$\Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$\therefore$ इकाई के घनमूल $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ होते है।

अर्थात् इकाई के तीन घनमूल होते है जिनमें से दो सम्मिश्र राशियाँ होती है।

प्रमेय: सिद्ध कीजिए कि इकाई के घनमूल में सम्मिश्र मूल एक दूसरे के वर्ग होते हैं। प्रमाण: माना $\boldsymbol{\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$ तथा $\boldsymbol{\beta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$ इकाई के दो सम्मिश्र मूल है।

$$\alpha^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3-i2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \beta$$

$$\beta^2 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3+i2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \alpha$$

अतः सिद्ध हुआ कि इकाई के सम्मिश्र घनमूल एक दूसरे के वर्ग होते हैं।

टिप्पणी:

1. इकाई के घनमूलों को $1, \omega, \omega^2$ से प्रदर्शित करते हैं।
2. इकाई के घनमूल के गुणधर्म : $(a)\omega^3 = 1$ तथा (b) $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

आर्गंड तल

- किसी सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ को समकोणिक अक्षों के एक युग्म के सापेक्ष एक कार्तीय (तल) में एक अद्वितीय बिंदु (a, b) के रूप में निरूपित किया जा सकता है।
- सम्मिश्र संख्या $0 + 0i$ मूल बिंदु $O(0,0)$ को निरूपित करती है।
- **एक शुद्धतः वास्तविक संख्या** a, अर्थात् $(a + 0i)$ को x-अक्ष पर स्थित बिंदु $(a, 0)$ से निरूपित किया जाता है। इसीलिए, **x-अक्ष को वास्तविक अक्ष कहते हैं।**
- **एक शुद्धतः काल्पनिक संख्या** ib, अर्थात् $(0 + ib)$ को y-अक्ष स्थित बिंदु $(0, b)$ से निरूपित किया जाता है। इसीलिए, **y-अक्ष को काल्पनिक अक्ष कहते हैं।**

इसी प्रकार, तल में सम्मिश्र संख्याओं के बिंदुओं द्वारा निरूपण को **आर्गंड आरेख (Argand) diagram)** कहते हैं। वह तल जिस पर सम्मिश्र संख्याओं को बिंदुओं के रूप में निरूपित किया जाता **है। सम्मिश्र तल या आर्गंड तल या गाउसनीय तल** कहलाता है।

यदि एक सम्मिश्र तल में, दो सम्मिश्र संख्या z_1 और z_2 को क्रमशः बिंदुओं P और Q से निरूपित किया जाता है, तो $|z_1 - z_2| = PQ$

ज्यामितीय भाषा मे बिन्दु (x, -y) वास्तविक अक्ष के सापेक्ष बिन्दु (x, y) का दर्पण प्रतिबिंब कहलाता हैं ।