Toppersnotes®
Unleash the topper in you

Indian Air Force

Agniveer

भाग - 2

गणित

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

1 CHAPTER समुच्चय

समुच्चय सिद्धांत का विकास जर्मन गणितज्ञ Georg Cantor (1845 -1918) द्वारा किया गया था ।

समुच्चय : समुच्चय वस्तुओं या संख्याओं का एक सुपरिभाषित संग्रह हैं ।

समुच्चय के प्रदर्शन के लिए कुछ मानक संकेतन :

- N : प्राकृत संख्याओं का समुच्चय
- W : पूर्ण संख्याओं का समुच्चय
- Z : पूर्णांकों का समुच्चय
- Z^+: धन पूर्णांकों का समुच्चय
- Z^-: ऋण पूर्णांकों का समुच्चय
- Q : परिमेय संख्याओं का समुच्चय
- I : अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय
- R : वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
- C : सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय

दूसरे प्रयुक्त होने वाले प्रतीक हैं-

$\in$: 'सदस्य है' या 'में है', $\notin$: 'सदस्य नहीं है' या 'में नहीं है'

$\exists$: अस्तित्व है, $\nexists$: अस्तित्व नहीं है ।

नोट :

- समुच्चय के लिए वस्तुएँ, अवयव तथा सदस्य पर्यायवाची पद हैं ।
- समुच्चय को प्राय: अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों द्वारा निर्मित किया जाता हैं ।
- समुच्चय के अवयव को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों द्वारा प्रदर्शित करते हैं ।

यदि a, समुच्चय A का एक अवयव है, तो हम कहते हैं कि a समुच्चय A में है। वाक्यांश 'अवयव है' 'सदस्य है' या 'में है' को सूचित करने के लिए यूनानी प्रतीक " $\in$ (epsilon)" का प्रयोग किया जाता है। अतः हम ' $a \in A'$ लिखते हैं। यदि b, समुच्चय A का अवयव नहीं है, तो हम ' $b \notin$ A ' लिखते हैं और इसे " b समुच्चय A में नहीं है" पढ़ते हैं।

समुच्चय को निरूपित करने की विधियां :

1. **रोस्टर विधि या सारणीबद्ध रूप :**

इस विधि में, समुच्चय के सभी अवयवों को सूचीबद्ध किया जाता है, अवयवों को एक दूसरे से, अर्धविराम द्वारा पृथक किया जाता है और उन सभी को एक मंझले कोष्ठक { } के भीतर लिखा जाता है।

- ✓ यदि V अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय है तो इसे रोस्टर विधि में इस प्रकार लिख सकते हैं : $V = \{a, e, i, o, u\}$
- ✓ यदि A, 7 से छोटी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, तो सारणीबद्ध रूप में $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ लिखा जायेगा।
- ✓ **टिप्पणी:** समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखते समय किसी अवयव को सामान्यतः दोबारा नहीं लिखते हैं।
  - ▪ उदाहरण के लिए यदि A , mathematics शब्द में प्रयुक्त अक्षरों का समुच्चय है तो $A = \{m, a, t, h, e, i, c, s\}$

2. **समुच्चय निर्माण रूप :**

इस रूप में अवयवों को सूचीबद्ध नहीं किया जाता परन्तु सभी अवयवों को एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

- ✓ मान लीजिए कि V अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय है तब V को समुच्चय निर्माण रूप में निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं : $V = \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है। $\}$
- ✓ मान लीजिए कि A, 7 से छोटी, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है तो $A = \{x : x \in N$ और $x < 7\}$

नोट : प्रतीक ' ∵ ' को 'ताकि' 'इस प्रकार कि' (such that) पढ़ा जाता है।

समुच्चय का वर्गीकरण :

1. **रिक्त समुच्चय (The empty set):** जिस समुच्चय में एक भी अवयव नहीं होता है उसे रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहते हैं तथा प्रतीक } या ϕ से प्रदर्शित करते हैं।
2. **एकल समुच्चय :** एक समुच्चय जिसमे केवल एक ही अवयव होता हैं, एकल समुच्चय कहलाता हैं ।
3. **परिमित और अपरिमित समुच्चय (Finite and infinite sets):** वह समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित होती है, परिमित समुच्चय कहलाता है अन्यथा समुच्चय अपरिमित कहलाता है।
4. **असंयुक्त समुच्चय :** दो समुच्चय A तथा B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं, यदि उनमे कोई भी अवयव उभयनिष्ठ न हो ।

   उदाहरण : A = {1,3,5} और B={2,4,6}
5. **समान समुच्चय (Equal sets):** दिये गये दो समुच्चय A और B में यदि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव है तथा B का प्रत्येक अवयव A का भी अवयव है, तो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं। दो समान समुच्चयों में तथ्यतः समान अवयव होते हैं।
6. **सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set):** किसी विशेष संदर्भ में यह एक आधारभूत समुच्चय होता है, जिसके अवयव तथा उप-समुच्चय उस विशेष संदर्भ में प्रासंगिक होते हैं। उदाहरण के लिए अंग्रेजी भाषा के वर्णमाला (Alphabet) में स्वर वर्णों (Vowels) के समुच्चय हेतु, अंग्रेजी भाषा के समस्त वर्णमाला का समुच्चय, एक सार्वत्रिक समुच्चय हो सकता है। सार्वत्रिक समुच्चय को प्रतीक U से निरूपित करते हैं।

उप-समुच्चय (Sub-sets):

- यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी एक अवयव है, तो A, B का उप-समुच्चय कहलाता है।
- प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि $A \subset B$, यदि $a \in A \Rightarrow a \in B$.
- हम वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को **R**, प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को **N**, पूर्णांकों के समुच्चय को **Z**, परिमेय संख्याओं के समुच्चय को **Q**, अपरिमेय संख्याओं के समुच्चय को **T** द्वारा निरूपित करते हैं।
- हम देखते हैं कि

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R},$$
$$\mathbf{T} \subset \mathbf{R}, \mathbf{Q} \not\subset \mathbf{T}, \mathbf{N} \not\subset \mathbf{T}$$

नोट :

- प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है अर्थात $A \subseteq A$
- रिक्त समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं होता है। उपसमुच्चय होने की स्थिति स्वयं ही पूरी हो जाती है। अतः रिक्त समुच्चय प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।
- यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$ तब $A = B$
- यदि $A \subseteq B$ और $A \neq B$ तो A, B का उचित उपसमुच्चय कहलाता है और B, A का अधिसमुच्चय कहलाता है। अर्थात $A \subset B$ या $B \supset A$

उदाहरण : यदि $A = \{x: x$ एक अभाज्य संख्या है और $x < 5\}$ और $B = \{y: y$ एक सम अभाज्य संख्या है। $\}$ क्या B, A का उचित उपसमुच्चय है ?

हल : यहाँ दिया गया है, $A = \{2,3\}, B = \{2\}$

स्पष्टत: $B \subseteq A$ और $B \neq A$

हम लिखते हैं कि $B \subset A$ और कहते हैं कि B, A का उचित उपसमुच्चय है।

एक समुच्च्य के उपसमुच्चयों की संख्या

मान लीजिए $A = \{x\}$, तब A के उपसमुच्चय ϕ, A हैं । यदि A एक समुच्चय है जिसमें $\boldsymbol{n(A) = p}$ है, तब A के **उपसमुच्चयों की संख्या** $= \mathbf{2^p}$ तथा A के उचित **उपसमुच्चयों की संख्या** $= \mathbf{2^p - 1}$ है।

ध्यान रहे कि $n(A) = 1$, A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 2 = 2^1$

मान लीजिए $A = \{2,4\}$, तब A के उपसमुच्चय $\phi, \{4\}, \{2\}, \{2,4\}$ हैं।

$n(A) = 2$, A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 4 = 2^2$

मान लीजिए $A = \{1,3,5\}$ तब A के उपसमुच्चय $\phi, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}$.

$n(A) = 3$, A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 8 = 2^3$

वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय

संख्याओं के कुछ मानक समुच्चयों को हम इस प्रकार जानते हैं-

प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $\mathrm{N} = \{1,2,3,4, \ldots \ldots \ldots \ldots\}$

पूर्ण संख्याओं का समुच्चय $\mathrm{W} = \{0,1,2,3,4, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ..\}$

पूर्णांकों का समुच्चय $\mathrm{Z} = \{\ldots \ldots \ldots, -4, -3, -2, -1,0,1,2,3,4, \ldots \ldots \ldots .\}$

परिमेय संख्याओं का समुच्चय $\mathrm{Q} = \left\{x: x = \frac{p}{q}, p, q \in Z \text{ तथा } q \neq 0\right\}$

अपरिमेय संख्याओं को I द्वारा निरूपित किया जाता है।

$\mathrm{I} = \{x: x \in \mathrm{R} \text{ तथा } x \notin \mathrm{Q}\}$ अर्थात् वह सभी वास्तविक संख्याएँ जो परिमेय नहीं है।

यह समुच्च्य वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय हैं। इन उपसमुच्चयों में से कुछ स्पष्ट सम्बन्ध इस प्रकार है :

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{W} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q}, \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}, \mathrm{I} \subset \mathrm{R}, \mathrm{N} \not\subset \mathrm{I}$$

वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय के रूप में अन्तराल

अन्तराल I, R का उपसमुच्चय है यदि $x, y \in \mathrm{I}$ तथा यदि z, x और y के मध्य कोई वास्तविक संख्या है, तब $z \in I$ है।

कोई वास्तविक संख्या जो एक अन्तराल के दो भिन्न-भिन्न अवयवों के बीच स्थित है, अन्तराल में होनी चाहिए

यदि $a, b \in \mathbf{R}$ तथा $a < b$ तो हम निम्न प्रकार के अन्तराल प्राप्त कर सकते हैं।

1. समुच्चय $\{x \in \mathrm{R}: a < x < b\}$ एक विवृत (खुला) अन्तराल कहलाता है और (a, b) द्वारा निरूपित होता है।
2. समुच्चय $\{x \in \mathrm{R}: a \leq x \leq b\}$ एक संवृत (बंद) अन्तराल कहलाता है और $[a, b]$ द्वारा निरूपित होता है
3. समुच्चय $\{x \in \mathbf{R}: a < x \leq b\}$ एक अन्तराल है, जो बायीं ओर खुला तथा दायीं ओर बन्द है यह $(a, b]$ द्वारा निरूपित होता है।
4. समुच्चय $\{x \in \mathbf{R}: a \leq x < b\}$ एक ऐसा अन्तराल है, जो बायीं ओर बन्द तथा दायीं ओर खुला है। यह $[a, b)$ द्वारा निरूपित होता है।
5. समुच्चय $\{x \in \mathrm{R}: x < a\}$ एक ऐसा अन्तराल है जो $(-\infty, a)$ द्वारा दर्शाया जाता है।
6. समुच्चय $\{x \in \mathrm{R}: x \leq a\}$ एक ऐसा अन्तराल है जो $(-\infty, a]$ द्वारा दर्शाया जाता है।
7. समुच्चय $\{x \in \mathbf{R}: x > a\}$ एक अन्तराल है जो (a, ∞) द्वारा निरूपित होता है।
8. समुच्चय $\{x \in \mathbf{R}: x \geq a\}$ एक अन्तराल है जो $[a, \infty)$ द्वारा निरूपित होता है।

प्रथम चार अन्तराल परिमित अन्तराल कहलाते हैं तथा संख्या $\mathrm{b} - \mathrm{a}$ (जो कि हमेशा धनात्मक होती है), चारों अन्तरालो (a, b), [a, b], (a, b], [a, b) में से प्रत्येक की लम्बाई कहलाती है। अंतिम चार अंतराल अपरिमित अन्तराल कहलाते हैं तथा इन अंतरालों की लम्बाई दर्शायी नहीं जा सकती।

घात समुच्चय

माना ki $A = \{a, b\}$ तो A के उपसमुच्चय $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ है। यदि हम इन उपसमुच्चयों को एक नए समुच्चय, मान लीजिये कि B , के अवयव मान लें तब $B = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

समुच्चय B , समुच्चय A का घात समुच्चय कहलाता है।

नोट : समुच्चय A के घात समुच्चय को P(A) से प्रदर्शित किया जाता है। समुच्चय A के घात समुच्चय में दिए हुए समुच्चय के सभी उपसमुच्चय होते हैं।

उदाहरण . निम्नलिखित समुच्चयों के घात समुच्चय लिखिए:

I. $A = \{x : x \in R$ और $x^2 + 7 = 0\}$

II. $B = \{y : y \in N$ और $1 \leq y \leq 3\}$

हल:

I. स्पष्टतः $A = \phi$ (रिक्त समुच्चय)

II. $\therefore \phi$. दिए हुए समुच्चय का केवल उपसमुच्चय है। $\therefore P(A) = \{\phi\}$

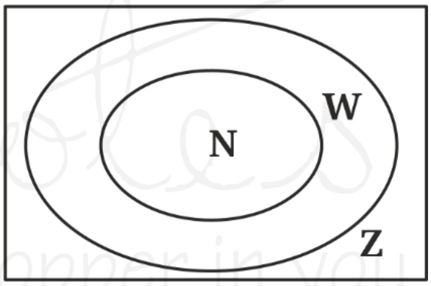
III. समुच्चय B को {1,2,3} के रूप में लिखा जा सकता है। B के उपसमुच्चय

IV. $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$ हैं।

V. $\therefore P(B) = \{\phi\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

वेन आरेख (Venn diagrams):

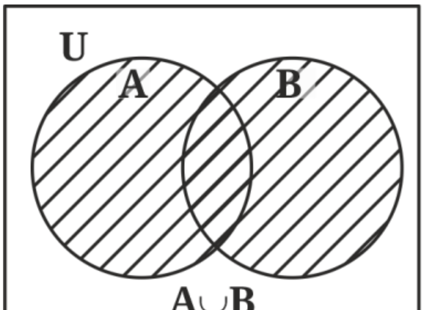
समुच्चयों के बीच संबंधों को निरूपित करने वाले आरेखों को वेन आरेख कहते हैं। उदाहरणार्थ, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय पूर्ण संख्याओं के समुच्चय का एक उप-समुच्चय है, जो स्वयं पूर्णांकों के समुच्चय का एक उप-समुच्चय है।



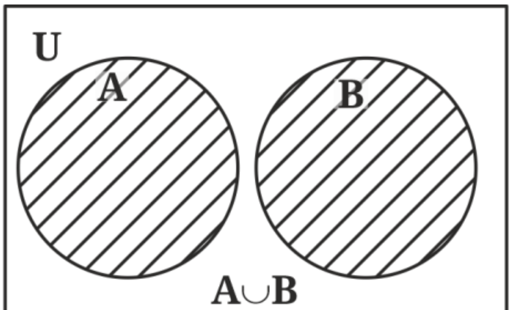
समुच्चय पर संक्रियाएँ :

समुच्चयों का सम्मिलन (Union of Sets): दो दिये हुए समुच्चय A और B का सम्मिलन समुच्चय C है, जिसमें वे सभी अवयव हैं जो या तो A में या B में हैं। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि

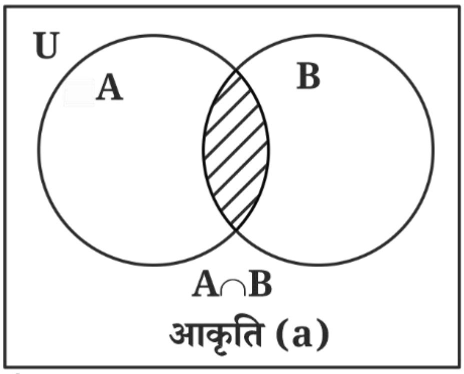
$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ या } x \in B\}$$

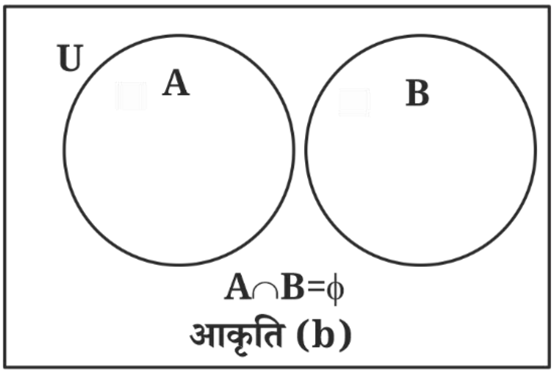


आकृति (a)



आकृति (b)





सम्मिलिन की संक्रिया के कुछ गुणधर्म

I. $A \cup B = B \cup A$
II. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
III. $A \cup \phi = A$
IV. $A \cup A = A$
V. $U \cup A = U$

समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of sets) :

- दो समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवययों का समुच्चय है जो A और B दोनों में हों।
- प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि $A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$.
- यदि $A \cap B = \phi$, तो A और B असंयुक्त समुच्चय (Disjoint sets) कहलाते हैं।

सर्वनिष्ठ संक्रिया के कुछ गुणधर्म

I. $A \cap B = B \cap A$
II. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
III. $\phi \cap A = \phi; U \cap A = A$
IV. $A \cap A = A$
V. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
VI. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

समुच्चयों का अंतर (Difference of sets) :

- प्रतीक $A - B$ द्वारा निरूपित समुच्चयों A और B का अंतर, उन अवयवों का समुच्चय है, जो A में हैं किंतु B में नहीं हैं।

$$A - B = \{x : x \in A \text{ और } x \notin B\}$$
$$B - A = \{x : x \in B \text{ और } x \notin A\}$$

समुच्चय का पूरक (Complement of a set) :

मान लीजिए कि U एक सार्वत्रिक समुच्चय है और A, U का एक उप-समुच्चय है, तो A का पूरक समुच्चय, U के उन अवयवों का समुच्चय है जो A के अवयव नहीं है। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि -

$$A' = \{x : x \in U \text{ और } x \notin A\}. \text{ साथ ही } A' = U - A$$

पूरक समुच्चयों के कुछ गुणधर्म

1. पूरक नियम (Law of complements)

I. $A \cup A' = U$
II. $A \cap A' = \phi$

2. डि-मॉर्गेन का नियम (De Morgan's law):

I. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
II. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
III. $(A')' = A$
IV. $U' = \phi$ तथा $\phi' = U$

दो समुच्चयों के सम्मिलन और सर्वनिष्ठ पर आधारित व्यावहारिक प्रश्नों को सरल करने के सूत्र

यदि A, B और C कोई परिमित समुच्चय हों, तब

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
b) यदि $(A \cap B) = \phi$, तो $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
c) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

2 CHAPTER त्रिकोणमिति

- **त्रिकोणमिति** दो शब्दों से मिलकर बना है - Trigon और metry
  - ✓ **Trigon:** जिसका अर्थ है तीन कोणों से बनी आकृति, यानी एक त्रिभुज
  - ✓ **Metry:** जिसका अर्थ है मापन
- अतः, त्रिकोणमिति का अर्थ है त्रिभुजों का मापन।
- **त्रिकोणमिति गणित** की वह शाखा है जो किसी त्रिभुज (मुख्यतः समकोण त्रिभुज) के कोणों और भुजाओं के बीच के संबंध का अध्ययन करती है, जिसमें **sine, cosine और tangent** जैसे अनुपातों का उपयोग किया जाता है।

Type 1: मूल कोणीय प्रणाली

षष्टिक पद्धति:

- एक ऐसी संख्या प्रणाली है जिसका आधार 60 होता है, जिसमें संख्याओं को 60 के गुणजों का उपयोग करके व्यक्त किया जाता है।
  - ✓ 60 मिनट = 1 डिग्री,
  - ✓ 60 सेकेंड = 1 चाप मिनट

वृत्तीय प्रणाली:

- वृत्तीय प्रणाली कोणों को रेडियन में मापने की एक विधि है, जहाँ एक पूरा वृत्त 2π रेडियन के बराबर होता है
- **डिग्री और रेडियन के बीच संबंध**
  - ✓ 2π रेडियन = 360 डिग्री
  - ✓ π रेडियन = 180 डिग्री

कोण का रूपांतरण

x डिग्री $= \left(\frac{\pi}{180}\right) \times x$ रेडियन

x रेडियन $= \left(\frac{180}{\pi}\right) \times x$ डिग्री

1 रेडियन $= 57°16'22''$

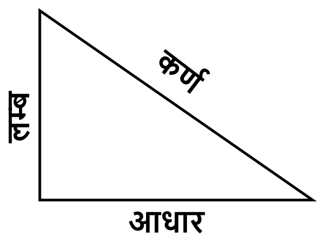
उदाहरण: रेडियन माप को डिग्री माप में बदलें: $\frac{-53\pi}{10}$.

हल:

$$1° = \frac{180°}{10}$$

$$= \frac{-53\pi}{10} \times \frac{180°}{\pi} = -954°$$

Type 2: न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात



$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

$\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

$\text{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$

$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

पायथागोरस प्रमेय:

- एक समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

  आधार $= a$, लम्ब $= b$, कर्ण $= c$

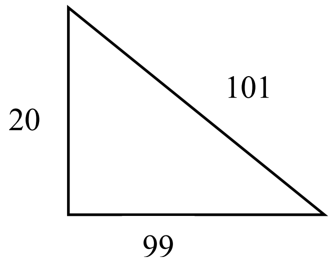
$a^2 + b^2 = c^2$

महत्वपूर्ण पायथागोरस त्रिक:

(3, 4, 5) (5, 12, 13) (7, 24, 25) (8, 15, 17), (9, 40, 41), (11, 60, 61) (12, 35, 37), (13, 84, 85),(16, 63, 65) (20, 21, 29), (28, 45, 53), (33, 56, 65) (36, 77, 85), (39, 80, 89), (48, 55, 73) (65, 72, 97),(20, 99, 101)

उदा: यदि $sin\theta = \frac{20}{101}$ तो $cos\theta$ और $tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए

हल:



$$sin\theta = \frac{20 \rightarrow P}{101 \rightarrow H}$$

तब, पायथागोरस प्रमेय से (20, 99, 101)

B = 99

$cos\theta = \frac{99}{101}$, $tan\theta = \frac{20}{99}$

उदा: यदि $sin\theta = \frac{2}{5}$ तो $sec\theta$ का मान ज्ञात कीजिए

हल:

$$sin\theta = \frac{2 \rightarrow P}{5 \rightarrow H}$$

पायथागोरस प्रमेय से

$5^2 = 2^2 + B^2$

$B = \sqrt{21}$

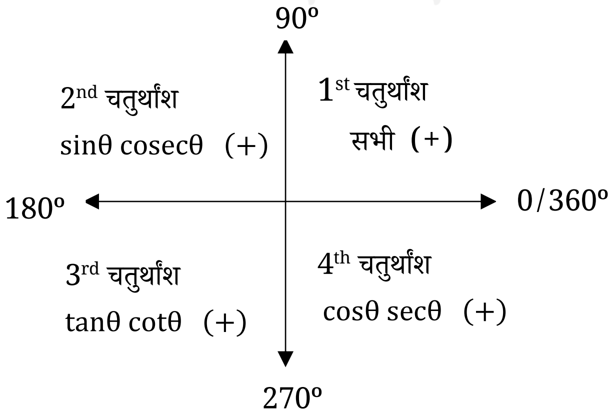
$sec\theta = \frac{H}{B} = \frac{5}{\sqrt{21}}$

Type 3: त्रिकोणमितीय चिह्न और कोण रूपांतरण नियम

$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta,\ \cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta,\ \text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\theta$



यदि गुणक 90° का सम गुणज है, तो फलन अपरिवर्तित रहता है।

यदि गुणक 90° का विषम गुणज है, तो फलन बदल जाता है।

(sin ↔ cos, tan ↔ cot, sec ↔ cosec)

मानक तालिका

	0°	30°	45°	60°	90°
$sin\ \theta$	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$cos\ \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0
$tan\ \theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$cot\ \theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0
$sec\ \theta$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$cosec\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1

उदा: $sin\theta = 570°$ का मान ज्ञात कीजये

हल : $= \sin(90 \times 6 + 30)$

इस तरह के सवालों को दो चरणों में हल किया जाता है:

(1) फलन में बदलाव

(2) चिन्ह में बदलाव

तो, इस सवाल में, 90° का गुणज सम है, इसलिए फलन को बदलने की कोई ज़रूरत नहीं है।

दूसरी बात, 90 × 6 दूसरे चतुर्थांश में आता है। 30° जोड़ने के बाद, यह तीसरे चतुर्थांश में चला जाता है; इसलिए, चिह्न ऋणात्मक हो जाता है।

$= \sin(90 \times 6 + 30) = -sin30°$

तालिका से $-sin30° = -\frac{1}{2}$

उदा: यदि $cot^2\theta + tan^2\theta = 2, 0° \leq \theta \leq 90°$ तो θ मान ज्ञात कीजिए

हल : $cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$

माना $cot^2\theta = \frac{1}{tan^2\theta}$

चूँकि , $x + \frac{1}{x} = 2$

$cot^2\theta = 1$

$\theta = 45°$

उदा: यदि $sin\theta + cos\theta = \sqrt{5}\sin(90 - \theta)$ तो $cot\theta$ का मान कीजिए

हल : $\sin(90 - \theta) = \cos\theta$

$\sin\theta = \cos\theta(\sqrt{5} - 1)$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta = \frac{1}{(\sqrt{5} - 1)}$$

परिमेयीकरण - गुणा और भाग $\sqrt{5} + 1$

$$cot\theta = \frac{1}{(\sqrt{5} - 1)} \times \frac{(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} + 1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

उदा: यदि $tan(A+B)=\sqrt{3}$ और $tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $A,B<90°, A\geq B$ तो A का मान ज्ञात कीजिए

हल: $tan(A+B)=\sqrt{3}$ $\quad A+B=60°$

$$tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$A-B=30°$

समीकरण को हल करने पर $\quad A=45°$

उदा: tan $(\theta-14\pi)$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : पहले कोण को बदलना है

$\tan(\theta-14\pi)=-\tan(14\pi-\theta)$

14π यह एक सम गुणज है और इसका चिह्न बदल जाएगा।

$=-(-tan\theta)=tan\theta$

उदा: व्यंजक को हल कीजिए

$$\frac{1}{cosx}\sqrt{\frac{cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}}=?$$

हल : नियमों के अनुसार फलन को रूपांतरित करने के बाद

$$\frac{1}{cosx}\sqrt{\frac{\cos x\cdot cosx}{\sin x\cdot sinx}}=\frac{1}{sinx}=cosecx$$

Type 4: त्रिकोणमिति की मूल सर्वसमिकाएँ

- $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
- $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$
  - ✓ $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$
  - ✓ $(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)=1$
  - ✓ $\sec\theta-\tan\theta=\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}$
- $\mathrm{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$
  - ✓ $\mathrm{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$
  - ✓ $(\mathrm{cosec}\theta-\cot\theta)(\mathrm{cosec}\theta+\cot\theta)=1$
  - ✓ $(\mathrm{cosec}\theta-\cot\theta)=\frac{1}{(\mathrm{cosec}\theta+\cot\theta)}$

उदा: यदि $6tanA(tanA+1)=5-tan\ A$, दिया गया है $0<A<\frac{\pi}{2}$ तो $tanA$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : $\quad 6tan^2A+7tanA-5=0$

द्विघात समीकरण को हल करने पर

$6\tan^2A+10\tan A-3\tan A-5=0$
$2\tan A(3\tan A+5)-1(3\tan A+5)=0$
$(3\tan A+5)(2\tan A-1)=0$

$\tan A=\frac{-5}{3},\frac{1}{2}$

क्योकि , $0<A<\frac{\pi}{2}$, तो $tan\ A$ का मान धनात्मक मान होगा

उदा: व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए

$$\frac{4\tan^2 30°+\sin^2 30°\cos^2 45°+\sec^2 48°-\cot^2 42°}{\cos 37°\sin 53°+\sin 37°\cos 53°+\tan 18°\tan 72°}$$

हल : $cot^2 42°=tan^2 48 \qquad cos37°=sin53°$

सर्वसमिका में मान रखने पर

$$=\frac{4\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+1}{sin^2 53+cos^2 53+1}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{8}+1}{2}=\frac{59}{48}$$

उदा: यदि $cosec\theta+cot\ \theta=p$, तो $\frac{p^2-1}{p^2+1}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : सर्वसमिका से

$(\mathrm{cosec}\theta-\cot\theta)(\mathrm{cosec}\theta+\cot\theta)=1$
$(\mathrm{cosec}\theta-\cot\theta)=\mathrm{p}$
$(\mathrm{cosec}\theta+\cot\theta)=\frac{1}{\mathrm{p}}$

दोनों समीकरणों को जोड़ने के बाद

$$2cot\theta=p-\frac{1}{p}=\frac{p^2-1}{p}$$

दोनों समीकरणों को घटाने के बाद

$$2cosec=p+\frac{1}{p}=\frac{p^2+1}{p}$$

नई समीकरण को विभाजित करके

$$\frac{p^2-1}{p^2+1}=cos\theta$$

Type 5: Sine और Cosine का मान अलग अलग कोणों पर

जैसे-जैसे θ, 0° से 90° तक बढ़ता है, $sin\theta$ का मान बढ़ता जाता है।

जैसे-जैसे θ, 0° से 90° तक बढ़ता है, $cos\theta$ का मान घटता जाता है।

α और β – न्यून कोण

यदि α > β, $sin\alpha>sin\beta$ & $cos\alpha<cos\beta$

यदि α < β, $sin\alpha<sin\beta$ & $cos\alpha>cos\beta$

उदा: $A=sin45°+cos45°$, $B=sin44°+cos44°$ तो A और B के बीच सम्बन्ध बताइए

हल : दोनों समीकरणों का वर्ग करने पर

सूत्र: $\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a$

$A^2 = \sin^2 45 + \cos^2 45 + 2\sin 45 \cdot \cos 45$
$A^2 = 1 + \sin 90$
$B^2 = \sin^2 44 + \cos^2 44 + 2\sin 44 \cdot \cos 44$
$B^2 = 1 + \sin 88$
$\sin 88 < \sin 90$
A और B के बीच सम्बन्ध बताइए → $A > B$

Type 6: त्रिकोणमितीय फलनों में मान रखना

सावधानियाँ—समीकरण में मान रखते समय, यह सुनिश्चित करें कि समीकरण 'अपरिभाषित' न हो जाए; उदाहरण के लिए, इसका परिणाम अनंत (infinity), 0/0 का रूप, या कोई अन्य अपरिभाषित रूप नहीं आना चाहिए। यह भी सुनिश्चित करें कि दोनों विकल्प एक समान न हों।

$sin135° = \frac{1}{\sqrt{2}}\ cos135 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{tan135}{cot135} = 1$

उदा: व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए

$$(\boldsymbol{1 + cotA - cosecA})(\boldsymbol{1 + tanA + secA}) - \boldsymbol{3}(\boldsymbol{sin^2A + cos^2A})$$

हल : $A = 45^\circ$ रखने पर

$= (1 + 1 - \sqrt{2})(1 + 1 + \sqrt{2}) - 3 = -1$

उदा: व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए

$$\frac{\boldsymbol{cotA}}{\boldsymbol{cotA - cot3A}} + \frac{\boldsymbol{tanA}}{\boldsymbol{tanA - tan3A}} = ?$$

हल : $A = 45^\circ$ रखने पर

$$\frac{cot45°}{cot45° - cot135°} + \frac{tan45°}{tan45 - tan145°}$$

$$= \frac{1}{1 - (-1)} + \frac{1}{1 - (-1)} = 1$$

उदा: व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए

$$\boldsymbol{3(sin^4x + cos^4x) + 2(sin^6x + cos^6x) + 12sin^2x \cdot cos^2x}$$

हल : $x = 0°$ रखने पर

$= 3(0 + 1) + 2(0 + 1) + 0 = 5$

Type 7: Special case 1- इन सर्वसमिकाओं पर आधारित प्रश्न

- $secA + tanA = \sqrt{\frac{1+sinA}{1-sinA}}$
- $secA - tanA = \sqrt{\frac{1-sinA}{1+sinA}}$
- $cosecA + cotA = \sqrt{\frac{1+cosA}{1-cosA}}$
- $cosecA - cotA = \sqrt{\frac{1-cosA}{1+cosA}}$

उदा: व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए

$$\sqrt{\frac{\boldsymbol{cosecA + 1}}{\boldsymbol{cosecA - 1}}} + \sqrt{\frac{\boldsymbol{cosecA - 1}}{\boldsymbol{cosecA + 1}}}$$

हल: $cosecA$ को $sinA$ के पदों में व्यक्त करना

$$= \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} + \sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}}$$

$= \sec A + \tan A + \sec A - \tan A = 2\sec A$

Type 8: Special case 2 इन सर्वसमिकाओं पर आधारित प्रश्न

$$\sec A + \tan A = \frac{\sin A - \cos A + 1}{\sin A + \cos A - 1} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$$

$$\sec A - \tan A = \frac{\sin A + \cos A - 1}{\sin A - \cos A + 1} = \frac{\cos A}{1 + \sin A}$$

$$\operatorname{cosec} A + \cot A = \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1}$$

$$\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{\cos A + \sin A - 1}{\cos A - \sin A + 1}$$

उदा: व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए

$$\frac{\boldsymbol{sinA + cosA - 1}}{\boldsymbol{sinA - cosA + 1}} \times \frac{\boldsymbol{tan^2A(cosec^2A - 1)}}{\boldsymbol{secA - tanA}} = ?$$

हल : विभिन्न सर्वसमिकाओ से

$$= (secA - tanA) \times \frac{tan^2A \cdot cot^2A}{(secA - tanA)} = 1$$

Type 9: यदि $\alpha + \beta = 90$ तो

$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1$	$\tan\alpha = \cot\beta$
$\sin\alpha \cdot \sec\beta = 1$	$\sin\alpha = \cos\beta$
$\cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta = 1$	$\cos\alpha = \sin\beta$

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

उदा: यदि $\boldsymbol{sin(x + y) \cdot sec(x - y) = 1}$ **तो** $\boldsymbol{tan^2x + sin^2x + sec^2x}$ **का मान ज्ञात कीजिए**

हल : $x + y + x - y = 90°$

$x = 45°$ x का मान रखने पर

$$\tan^2 x + \sin^2 x + \sec^2 x = 1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

Type 10: श्रेणी पर आधारित प्रश्न

उदा:श्रेणी का मान ज्ञात कीजिए

$\mathbf{tan1° \cdot tan2° \cdot tan3° \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots tan89°} = ?$

हल: 1°+89° = 90°

$tan1° \cdot tan89° = 1$

एक-दूसरे को रद्द करने के बाद

$tan1° \cdot tan2° \cdot tan3° \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots tan89° = 1$

उदा: श्रेणी का मान ज्ञात कीजिए $\boldsymbol{cos^2 1° + cos^2 2° + cos^2 3° + \cdots . + cos^2 90°}$

हल : 1°+89° = 90°

$cos^2 1° + cos^2 89° = 1$(88 पद 44 बन जाते हैं।)

$$88 \text{ terms} + cos45^2 + cos^2 90 = \frac{88}{2} + 1 + 0 = 44\frac{1}{2}$$

Type 11: फलनो का वर्ग करना और उन्हें जोड़ना

यदि $a\, sin\theta + b\, cos\theta = x$ और

$b\, sin\theta - a\, cos\theta = y$ तब

$a^2 + b^2 = x^2 + y^2$

1. यदि $a\, sec\theta \pm b\, tan\theta = x$ और $b\, sec\theta \pm a\, tan\theta = y$ तब

   $a^2 - b^2 = x^2 - y^2$
2. यदि $a\, cosec\theta \pm b\, cot\theta = x$ और $b\, cosec\theta \pm a\, cot\theta = y$ तब

   $a^2 - b^2 = x^2 - y^2$

(प्रश्न को हल करने से पहले, यह सुनिश्चित करें कि त्रिकोणमितीय फलनों के गुणांक मानक रूप में हों)

उदा: यदि $\boldsymbol{3sinA + 5cosA = 4}$ **और** $\boldsymbol{5sinA - 3cosA} = ?$

हल : माना $5sinA - 3cosA = x$

concept का प्रयोग करने पर $5^2 + 3^2 = 4^2 + x^2$

$x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

उदा: यदि $\boldsymbol{a \cot\theta + b\, \text{cosec}\theta = p}$ **और** $\boldsymbol{b \cot\theta + a\text{cosec}\theta = q}$ **तो** $\boldsymbol{p^2 - q^2}$ **का मान ज्ञात कीजिए .**

हल: इस प्रश्न में, व्यंजक मानक रूप में नहीं है। इस प्रश्न में, cosec का गुणांक ‘b’ है, इसलिए हमें व्यंजक को मानक रूप में पुनः लिखना होगा।

$b\, \text{cosec}\theta + a \cot\theta = p$

$b \cot\theta + a\, \text{cosec}\theta = q$

तो, इस अवधारणा का उपयोग करने के बाद

$p^2 - q^2 = b^2 - a^2$

Type 12: बीजगणितीय सर्वसमिकाओं पर आधारित त्रिकोणमिति का प्रश्न

$\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2\sin^2 A \cdot \cos^2 A$

$\sin^6 A + \cos^6 A = 1 - 3\sin^2 A \cdot \cos^2 A$

$\sin^3 A - \cos^3 A = (\sin A - \cos A)(\sin^2 A + \cos^2 A + \sin A \cdot \cos A)$

उदा: x का मान क्या है यदि

$$\boldsymbol{(1 + cot\, A + tan\, A)(sin\, A - cos\, A)\left(\frac{sin\, A cos\, A}{sin^3\ A - cos^3\ A}\right) = x}$$

हल: सूत्र का प्रयोग करने पर

$$= \frac{(cosA\, sinA + sin^2 A + cos^2 A)}{cosA\, sinA} \times (sin\, A - cos\, A) \times \frac{sin\, A\, cos\, A}{(sinA - cosA)(sin^2 A + cos^2 A + sinA \cdot cosA)}$$

व्यंजक को हल करने पर x = 1

उदा: यदि $\boldsymbol{cosec\theta + cosec^2\theta = 1,}$ **तो** $\boldsymbol{(cot^{12}\theta - 3cot^{10}\theta + 3cot^8\theta - cot^6\theta)} = ?$

हल : $cosec^2\theta - 1 = -cosec\theta = cot^2\theta$

$(cot^{12}\theta - 3cot^{10}\theta + 3cot^8\theta - cot^6\theta) = (cot^4 x - cot^2 x)^3$

व्यंजक में मान रखने पर

$(cot^4 x - cot^2 x)^3 = (cosec^2 x + cosecx)^3 = 1^3 = 1$

Type 13: दोहरे कोण के सूत्र

- $sin2A = 2\, sinA\, cosA = \frac{2tanA}{1+tan^2 A}$
- $cos2A = 2cos^2 A - 1 = 1 - 2sin^2 A = \frac{1-tan^2 A}{1+tan^2 A}$
- $cos2A = cos^4 A - sin^4 A = cos^2 A - sin^2 A$
- $tan2A = \frac{2tanA}{1-tan^2 A}$
- $cot2A = \frac{cot^2 A - 1}{2cotA}$

उदा: निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

$$\sqrt{\mathbf{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2cos8A}}}}$$

हल: वर्गमूल के अंदर 2 को उभयनिष्ठ लेने पर

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2(1+cos8A)}}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\times 2cos^2 4A}}}$$

2 को दो बार उभयनिष्ट लेने पर

$$=\sqrt{2+\sqrt{2\times cos^2 2A}}$$

$$=\sqrt{2(1+cos2A)}=\sqrt{2\times 2cos^2 A}=2cosA$$

Type 14: त्रिक कोण सूत्र

$sin3A = 3sinA - 4sin^3A$

$cos3A = 4cos^3A - 3cosA$

$tan3A = \dfrac{3tanA - tan^3A}{1-3tan^2A}$

उदा: निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

$\boldsymbol{sin10^\circ - \frac{4}{3}sin^3 10^\circ = ?}$

हल: $sin10^\circ - \frac{4}{3}sin^3 10^\circ = \frac{3sin10^\circ - 4sin^3 10^\circ}{3}$

$= \dfrac{sin30}{3} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

Type 15: मूल सूत्र और योग-गुणनफल सूत्र

मूल सूत्र

- $sin(A+B) = sinA\,cosB + cosA\,sinB$
- $sin(A-B) = sinA\,cosB - cosA\,sinB$
- $cos(A+B) = cosA\,cosB - sinA\,sinB$
- $cos(A-B) = cosA\,cosB + sinA\,sinB$
- $tan(A+B) = \frac{tanA+tanB}{1-tanA\,tanB}$
- $tan(A-B) = \frac{tanA-tanB}{1+tanA\,tanB}$
- $cot(A+B) = \frac{cotA\,cotB-1}{cotB+cotA}$
- $cot(A-B) = \frac{cotA\,cotB+1}{cotB-cotA}$
- $sin^2A - sin^2B = sin(A+B)\cdot sin(A-B)$
- $cos^2A - sin^2B = cos(A+B)\cdot cos(A-B)$

गुणनफल से योग के सूत्र

- $2sinA\,cosB = sin(A+B) + sin(A-B)$
- $2\,cosA\,sinB = sin(A+B) - sin(A-B)$
- $2cosA\,cosB = cos(A+B) + cos(A-B)$
- $2sinA\,sinB = cos(A+B) - cos(A-B)$

योग से गुणनफल सूत्र

- $sinC + sinD = 2sin\left(\frac{C+D}{2}\right)cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$
- $sinC - sinD = 2cos\left(\frac{C+D}{2}\right)sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$
- $cosC + cosD = 2cos\left(\frac{C+D}{2}\right)cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$
- $cosC - cosD = -2sin\left(\frac{C+D}{2}\right)sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

उदा: निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

$$\boldsymbol{\frac{[(sin59^\circ cos31^\circ + cos59^\circ sin31^\circ)}{(cos20^\circ cos25^\circ - sin20^\circ sin25^\circ)]}}$$

हल:

$$\frac{(sin59^\circ cos31^\circ + cos59^\circ sin31^\circ)}{(cos20^\circ cos25^\circ - sin20^\circ sin25^\circ)}$$

$$=\frac{sin(59+31)}{\cos(20+25)} = \frac{sin90}{cos45} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

उदा: निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

$$\boldsymbol{\frac{(sinx+siny)(sinx-siny)}{(cosx+cosy)(cosy-cosx)}}$$

हल:

$$=\frac{2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\times 2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\times(-2)sin\left(\frac{x+y}{2}\right)sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$=-1$$

Type 16: Advanced trigonometry identity -1

- $A+B = 45^\circ$ या 225°
  $(1+tanA)(1+tanB) = 2$
  $(1-cotA)(1-cotB) = 2$
- $A+B = 135^\circ$
  $(1-tanA)(1-tanB) = 2$
  $(1+cotA)(1+cotB) = 2$
- $A+B = 0^\circ/180^\circ$
  $tanA + tanB + tanc = tanA\,tanB\,tanc$
  $cotA\,cotB + cotB\,cotc + cotc\,cotA = 1$
- $A+B = 90^\circ/270^\circ$
  $\mathrm{cotA\,cotB\,cotC = cotA + cotB + cotC}$
  $\mathrm{tanA\,tanB + tanB\,tanc + tanc\,tanA = 1}$

उदा: निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

$$\boldsymbol{\left[1+tan\left(22\tfrac{1}{2}^\circ + x - y\right)\right]\left[1+tan\left(22\tfrac{1}{2}^\circ + y - x\right)\right].}$$

Sol: $22\frac{1}{2}^\circ + x - y + 22\frac{1}{2}^\circ + y - x = 45$

$$\left[1+\tan\left(22\tfrac{1}{2}^\circ + x - y\right)\right]\left[1+\tan\left(22\tfrac{1}{2}^\circ + y - x\right)\right] = 0$$

उदा: यदि $x + y + z = 180°$, $tanx \cdot tanz = 7$

$tany \cdot tanz = 8$ **तो** $tan^2 z = ?$

हल: $x + y + z = 180°$ so,

$tanx + tany + tanz = tanx\ tany\ tanz$

$tanz$ से गुणा करने पर

$$\tan x \tan z + \tan y \tan z + \tan^2 z = \tan x \tan y \tan z \cdot \tan z$$

मान रखने पर

$7 + 8 + tan^2 z = 7 \times 8$

$tan^2 z = 41$

Type 17 Advanced trigonometry identity – 2

$$\sin\theta \cdot \sin(60° - \theta) \cdot \sin(60° + \theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

$$\cos\theta \cdot \cos(60° - \theta) \cdot \cos(60° + \theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta$$

$$\tan\theta \cdot \tan(60° - \theta) \cdot \tan(60° + \theta) = \tan 3\theta$$

$$\cot\theta \cdot \cot(60° - \theta) \cdot \cot(60° + \theta) = \cot 3\theta$$

उदा: $tan20° \cdot tan40° \cdot tan80°$ **का मान ज्ञात कीजिए**

हल: यह प्रश्न एक सर्वसमिका के रूप में है।

$\theta = 20°$

$\tan 20° \cdot \tan 40° \cdot \tan 80° = \tan 60°$

$\tan 60° = \sqrt{3}$

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम जिनका प्रश्न में सीधे तौर पर उपयोग किया गया है।

$tan^2x - sin^2x = tan^2x \cdot sin^2x$

$cot^2x - cos^2x = cot^2x \cdot cos^2x$

$sec^2x + cosec^2x = sec^2x \cdot cosec^2x$

$tanx + cotx = secx \cdot cosecx$

$(1 + secx + tanx)(1 - cosecx + cotx) = 2$

$(1 + cotx - secx)(1 + tanx + cosecx) = 2$

$$tan(45 + x) = \frac{1 + tanx}{1 - tanx}$$

$$tan(45 - x) = \frac{1 - tanx}{1 + tanx}$$

त्रिकोणमितीय फलनों के अधिकतम और न्यूनतम मान

- **अधिकतम मान:** वह सबसे बड़ा मान जो कोई त्रिकोणमितीय फलन अपने प्रांत में प्राप्त कर सकता है।
- **न्यूनतम मान:** वह सबसे छोटा मान जो कोई त्रिकोणमितीय फलन अपने प्रांत में प्राप्त कर सकता है।

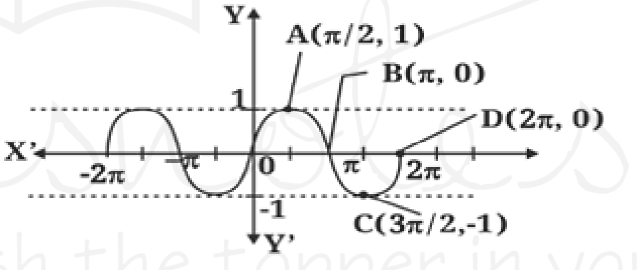
फलन के अधिकतम और न्यूनतम मान

फलन	अधिकतम	न्यूनतम
sinx or cosx	1	-1
$\sin^2x$ or $\cos^2x$	1	0
$\sin^3x$ or $\cos^3x$	1	-1
tanx or cotx	∞	-∞
$\tan^2x$ or $\cot^2x$	∞	0
$\tan^3x$ or $\cot^3x$	∞	-∞
secx or cosecx	∞	-∞
$\sec^2x$ or $\csc^2x$	∞	1
$\sec^3x$ or $\csc^3x$	∞	-∞

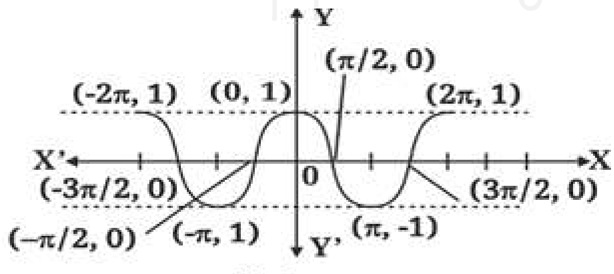
Note: $secx$ और $cosecx$ का मान -∞ से ∞ के बीच कुछ भी हो सकता है, लेकिन $secx$ और $cosecx$ का मान -1 और 1 के बीच नहीं हो सकता;

$\sec x \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

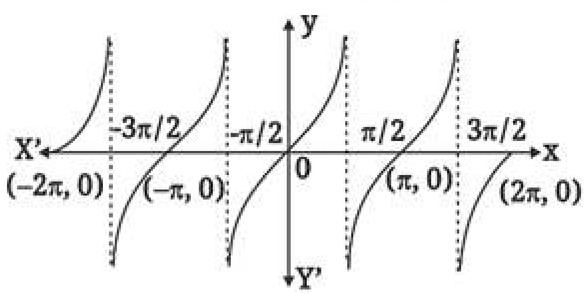
$\mathrm{cosec}\,x \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



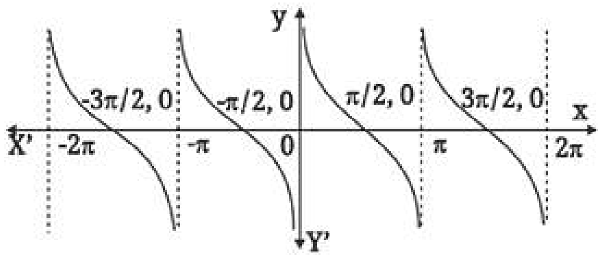
f(x) = sin x



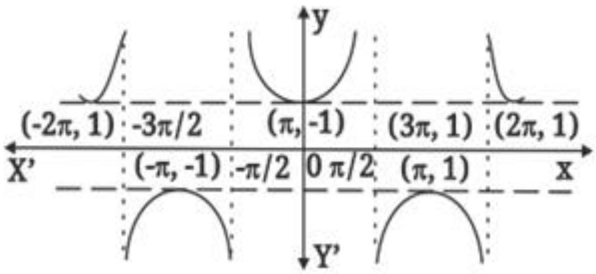
f(x) = cos x



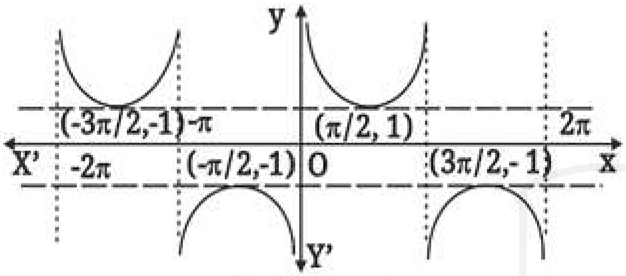
f(x) = tan x



f(x) = coses x



f(x) = sec x



f(x) = cot x

उदा: $10 + \sin x$ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sin x$ का न्यूनतम मान = -1

और $\sin x$ का अधिकतम मान = 1

न्यूनतम मान = 10-1 = 9

अधिकतम मान = 10+1 = 11

उदाहरण: $11 + \sec^2 x$ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात करें।

हल:

Method 1

अधिकतम मान नहीं पूछा जाएगा और यह ∞ के बराबर होगा।

न्यूनतम मान = 11 + 1 = 12 (नोट के अनुसार)

Method 2

11+sec^2x = 11+1+tan^2x और $tanx$ का न्यूनतम मान = 0

न्यूनतम मान = 11 + 1 = 12

व्यंजक के अधिकतम और न्यूनतम मान

व्यंजक	न्यूनतम	अधिकतम
$a\sin x \pm b\cos x$	$-\sqrt{a^2+b^2}$	$\sqrt{a^2+b^2}$
$a\sin^2 x \pm b\cos^2 x$	न्यूनतम $[a, b]$	अधिकतम $[a, b]$
$a\sin^n x + b\mathrm{cosec}^n x$	यदि $a \geq b$ न्यूनतम $= 2\sqrt{ab}$ यदि $a < b$ न्यूनतम $= a + b$	∞ ∞
$a\cos^n x + b\sec^n x$	यदि $a \geq b$ न्यूनतम $= 2\sqrt{ab}$ यदि $a < b$ न्यूनतम $= a + b$	∞ ∞
$a\tan^n x + b\cot^n x$	$2\sqrt{ab}$	∞
$a\sec^2 x + b\mathrm{cosec}^2 x$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$	∞
$\sin^n x \cdot \cos^n x$ $n \to$ odd	$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$\sin^n x \cdot \cos^n x$ $n \to$ सम	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$\sin^{2m} x + \cos^{2n} x$		1

उदा: $8sinx + 15sinx$ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल: तालिका से

अधिकतम मान = $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$

न्यूनतम मान = $-\sqrt{8^2 + 15^2} = -17$

उदा: $\frac{1}{3cosx - 4sinx + 7}$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

हल: अधिकतम मान के लिए, संबंधित फलन का मान न्यूनतम होना चाहिए, क्योंकि ये व्यंजक एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं।

अधिकतम मान $= \frac{1}{-\sqrt{3^2+4^2}+7} = \frac{1}{2}$

3 CHAPTER त्रिकोणमितीय फलन

प्रतिलोम वृत्तीय फलन :

कोण θ को x के रूप में व्यक्त करने वाला व्यंजक $\sin^{-1} x$ प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse circular function) कहलाता है। इसी प्रकार कोण θ को, एक संख्या x के रूप में व्यक्त करने वाले अन्य प्रतिलोम वृत्तीय फलन है:

$$\cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \cos^{-1} x \text{ तथा } \cot^{-1} x$$

नोट :

1. $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ फलनों में -1 घात नहीं है, इसे केवल प्रतिलोम फलन के संकेत के रूप में प्रयोग किया गया है क्योंकि

$$(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} \text{ अतः } \sin^{-1} x \neq (\sin x)^{-1}$$

2. $\sin^{-1} x$ एक कोण को व्यक्त करता है। जबकि $\sin \theta$ एक संख्या को, जहाँ θ एक कोण है।

वृत्तीय फलन			**प्रतिलोम वृतीय फलन**		
फलन	**प्रांत**	**परिसर**	**फलन**	**प्रांत**	**परिसर**
$\sin x$	$x \in R$ या $\ldots\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \ldots$	$y \in [-1,1]$	$\sin^{-1} x$	$x = [-1,1]$	$\ldots\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2};\right]$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$ $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \ldots$
$\cos x$	$x \in R$ या $\ldots [-\pi, 0], [0, \pi], [\pi, 2\pi]$	$y \in [-1,1]$	$\cos^{-1} x$	$x \in [-1,1]$	$\ldots [-\pi, 0];$ $[0, \pi];$ $[\pi, 2\pi], \ldots$
$\tan x$	$x \in R - (2n+1)\frac{\pi}{2}, \forall n \in Z$ या $\ldots\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \ldots$ टिप्पणी: $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in R$	$\tan^{-1} x$	$x \in R$	$\ldots\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots$ टिप्पणी: $\ldots - \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नही है।

$\cot\ x$	$x \in R - n\pi\ \forall n \in Z$ या $\dots(-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi)$ टिप्पणी: $-\pi, 0, \pi, 2\pi$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in R$	$\cot^{-1}\ x$	$x \in R$	...(- π, 0); $(0, \pi)$; $(\pi, 2\pi), \dots$ टिप्पणी: ... $-\pi, 0, \pi, 2\pi$ ... इत्यादि पर फलन परिभाषित नही है।
$\sec\ x$	$x \in R - (2n+1)\frac{\pi}{2}\ \forall n \in Z$ या $\dots[-\pi, 0] - \{-\pi/2\}$, $[0, \pi] - \{\pi/2\}$,	$y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ अर्थात् -1 व 1 के मध्य परिसर उपस्थित नहीं है	$\sec^{-1}\ x$	$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\dots[-\pi, 0] - \{-\pi/2\}$; $[0, \pi] - \{\pi/2\}$, $[\pi, 2\pi] - \{3\pi/2\}, \dots$ टिप्पणी: $\dots - \pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \dots$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नही है।
$\mathrm{cosec} x$	$x \in R - n\pi\ \forall n \in Z$ $\dots[-3\pi/2, -\pi/2] - \{-\pi\}$, $[-\pi/2, \pi/2] - \{0\}$, $[\pi/2, 3\pi/2] - \{\pi\}, \dots$ टिण्णीः $\dots - \pi, 0, \pi, \dots$ पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ अर्थात् -1 व 1 के मध्य परिसर उपस्थित नहीं है।	$\mathrm{cosec}^{-1} x$	$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\dots[-3\pi/2, -\pi/2] - \{-\pi\}$; $[-\pi/2, \pi/2] - \{0\}$; $[\pi/2, 3\pi/2] - \{\pi\}, \dots$ टिप्पणीः ...- $\pi, 0, \pi, \dots$ हत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।

<u>व्यापक मान (General values):</u>

हम जानते हैं कि $\sin\ \theta = \sin\{n\pi + (-1)^n\theta\}$, जहाँ $n \in Z$ पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय है। अब यदि $\sin^{-1}\ x = \theta$ हो, तो $\sin^{-1}\ x$ का व्यापक मान $n\pi + (-1)^n\sin^{-1}\ x$ होता है तथा इसे $\sin^{-1}\ x$ से निरूपित किया जाता है। अतः $\mathrm{Sin}^{-1}x = n\pi + (-1)^n\sin^{-1}\ x, n \in Z$

इसी प्रकार

$$\mathrm{Cos}^{-1}x = 2n\pi \pm \cos^{-1}\ x, n \in Z$$
$$\mathrm{Tan}^{-1}x = n\pi + \tan^{-1}\ x \text{ इत्यादि}$$

जहाँ $\mathrm{Cos}^{-1}x, \mathrm{Tan}^{-1}x$ से हमारा तात्पर्य $\cos^{-1}\ x, \tan^{-1}\ x$ के व्यापक मान से है। इसी प्रकार $\mathrm{Sec}^{-1}x, \mathrm{Cosec}^{-1}x, \mathrm{Cot}^{-1}x$ से हमारा तात्पर्य $\sec^{-1}\ x, \mathrm{cosec}^{-1}x, \cot^{-1}\ x$ के व्यापक मान से होगा।

मुख्य मान (Principal value):

प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse circular function) का मुख्य मान θ का वह छोटे से छोटा धनात्मक या ऋणात्मक मान है जो समीकरण $\sin\theta = x, \cos\theta = x$ इत्यादि को सन्तुष्ट करता है। उदाहरणार्थ $\sin^{-1}\frac{1}{2} = 30^\circ, \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ मुख्य मान को हम संकेतन में छोटे अक्षर $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ इत्यादि से व्यक्त करते हैं। प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के मुख्य मानों के अन्तराल निम्न है :

फलन	मुख्य मान	प्रान्त
$y = \sin^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$-1 \le x \le 1$
$y = \cos^{-1} x$	$0 \le y \le \pi$	$-1 \le x \le 1$
$y = \tan^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < \infty$
$y = \sec^{-1} x$	$0 < y \le \pi, y \ne \frac{\pi}{2}$	$(-\infty < x \le -1) \cup (1 \le x < \infty)$
$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, y \ne 0$	$(-\infty < x \le -1) \cup (1 \le x < \infty)$
$y = \cot^{-1} x$	$0 < y < \pi$	$-\infty < x < \infty$

नोट :

(i) यदि $x > 0$ है तब सभी प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के मुख्य मान प्रथम चतुर्थांश $[0, \pi/2]$ में स्थित है।
(ii) यदि $x < 0$ है तब $\sin^{-1} x, \tan^{-1} x$ तथा $\operatorname{cosec}^{-1} x$ के मुख्य मान चतुर्थ चतुर्थांश $[-\pi/2, 0]$ में स्थित है, जब कि $\cot^{-1} x, \sec^{-1} x$ के मुख्य मान द्वितीय चतुर्थाश $[\pi/2, \pi]$ में स्थित होते हैं।

प्रतिलोम वृत्तीय फलनो के मध्य संबंध :

$$\therefore \sin^{-1} x = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$
$$= \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$$

प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के गुणधर्म :

(i) $\boldsymbol{\sin(\sin^{-1} x) = x, -1 \le x \le 1}$ **एवं** $\boldsymbol{\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}}$

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \qquad \cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$$
$$\tan(\tan^{-1} x) = x \qquad \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$$
$$\cot(\cot^{-1} x) = x \qquad \cot^{-1}(\cot\theta) = \theta$$
$$\sec(\sec^{-1} x) = x \qquad \sec^{-1}(\sec\theta) = \theta$$
$$\operatorname{cosec}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = x \qquad \operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec}\theta) = \theta$$

टिप्पणी: $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) \ne \frac{2\pi}{3}$ क्योंकि $\sin^{-1} x$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ नहीं है।

$$\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\left[\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$