Toppersnotes®
Unleash the topper in you

सामान्य विज्ञान एवं गणित

उच्च प्राथमिक स्तर - कक्षा 6 से 8

सभी शिक्षण परीक्षाओं के लिए

भाग - 4

शैक्षणिक गणित एवं शिक्षाशास्त्र

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
1	सांख्यिकी	1
2	प्रायिकता	27
3	क्रमचय एवं संचय	45
4	अवकलन	50
5	अवकल समीकरण	77
6	समाकलन	88
7	द्विपद प्रमेय	114
8	आव्यूह एवं सारणिक	120
9	गणित की प्रकृति एवं तर्क शक्ति	144
10	गणित की विशेषताएँ	146
11	गणित में पाठ्यचर्या विकास का सिद्धांत	147
12	पाठ्यक्रम में गणित की महता	150
13	गणित की भाषा	152
14	गणित में मूल्यांकन	154
15	गणितीय शिक्षण की नवीन विधियाँ	156
16	शिक्षण की समस्याएँ	160
17	निदानात्मक एवं उपचारात्मक शिक्षण	161
18	शिक्षण सहायक सामग्री	163
19	मापन एवं मुल्यांकन	165

1
CHAPTER

सांख्यिकी

सांख्यिकी गणित की एक विशेष महत्वपूर्ण शाखा हैं जिसमे मुख्यत: आकड़ों और उनके निरूपण की चर्चा की जाती हैं ।

या

गणित की वह शाखा को, जिसमे आकड़ों से अर्थपूर्ण सूचनाएँ ज्ञात करने का अध्ययन किया जाता हैं, सांख्यिकी कहते हैं ।

सांख्यिकी वह विज्ञान हैं, जो संख्यात्मक आकड़ों के संग्रह, संगठन, विश्लेषण और निर्वचन (व्याख्या) का कार्य करती हैं ।

आकड़े (Data) :

किसी समस्या से संबंधित संख्यात्मक तथ्यों के समूह के विस्तृत रूप को आकड़े कहते हैं ।

- **प्राथमिक आकड़े (Primary Data) :** वे आकड़े जिसे अनुसंधानकर्ता सर्वप्रथम स्वयं संबंधित स्थान से संग्रह करता हैं एवं उपयोग करता हैं । तो इस प्रकार प्राप्त आकड़ों को प्राथमिक आकड़े कहते हैं ।
- **द्वितीयक आकड़े (Secondary Data) :** वे आकड़े जो किसी दूसरे के द्वारा पहले ही एकत्रित किया जा चुके हैं, यदि कोई दूसरा विशेषज्ञ इन आकड़ों का उपयोग करता हैं । तो ये आकडे द्वितीयक आकड़े कहलाते हैं ।

प्राथमिक एवं द्वितीयक आकड़ों के मध्य अंतर	
प्राथमिक आकड़े	**द्वितीयक आकड़े**
➢ इसे अनुसंधानकर्ता स्वयं एकत्रित करता हैं	➢ ये आकड़े किसी दूसरे अनुसंधानकर्ता द्वारा एकत्रित आकड़ों से लिए जाते हैं ।
➢ इसे एकत्रित करने मे अधिक समय, श्रम और धन लगता हैं ।	➢ इन आकड़ों के संग्रह मे कम समय, श्रम और धन लगता हैं
➢ ये आकड़े उद्देश्य के अनुकूल एकत्रित किए जाते हैं ।	➢ ये आकड़े किसी अन्य उद्देश्य से लिए गए हो सकते हैं, इसलिए ये वर्तमान उद्देश्य के अनुकूल नहीं होते हैं ।
➢ इन आकड़ों से किया गया अनुसंधान सही एवं उद्देश्यपूर्ण होते हैं	➢ इन आकड़ों से किया गया अनुसंधान संदेहास्पद हो सकता हैं ।

आकड़ों के संग्रहण की विधियाँ :

प्राथमिक आँकड़ों का संकलन विधियाँ :

- **प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान द्वारा :** यह वह विधि है जिसमें एक अनुसंधान कर्ता स्वयं अनुसंधान क्षेत्र में जाकर सूचना देने वालों से प्रत्यक्ष तथा सीधा संपर्क स्थापित करता है और आंकड़े एकत्र करता है ।
- **अप्रत्यक्ष मौखिक जाँच द्वारा :** यह वह विधि है जिसमें किसी समस्या से संबंध रखने वाले व्यक्तियों से अप्रत्यक्ष रूप से कुछ तैयार प्रश्नों के द्वारा पूछताछ कर आँकड़ें प्राप्त किये जाते हैं। बड़े एवं विस्तृत क्षेत्र क्षेत्र के लिए यह विधि उपयुक्त है ।

- **प्रश्नावली एवं अनुसूचियों के द्वारा सूचनाएँ:** इस विधि में अनुसंधान करता प्रश्नावली तैयार करता है और उन्ही प्रश्नों के माध्यम से सूचनाएं एकत्रित करता है
  - ✓ यह दो प्रकार से की जाती है ।

  1. **डाक विधि :** इस विधि में तैयार प्रश्नावली कुछ सूचना देने वाले व्यक्तियों के पास भेज दी जाती है, जब यह सूचना अनुसंधान कर्ता के पास पहुँचाता है तो उसकी इन सूचनाओं को गुप्त रखा जाता है ।
  2. **गणक या अनुसूची विधि** : अनुसंधान के उद्देश्य की पूर्ति को ध्यान मे रखकर पहले प्रश्नावली तैयार की जाती हैं, फिर गणक (अनुसंधानकर्ता का सहायक) उसे लेकर सूचना देने वाले व्यक्ति के पास जाते हैं । वे सूचकों से प्रश्न पूंछकर स्वयं भरते हैं ।

द्वितीयक या गौण आकड़ों की संकलन विधियाँ :

- **प्रकाशित स्रोत से :**
  - ✓ सरकारी स्रोत :
  - ✓ अंतराष्ट्रीय प्रकाशन
  - ✓ पत्र-पत्रिकाएँ
  - ✓ व्यक्तिगत अनुसंधान कर्ताओं के प्रकाशन से
  - ✓ अनुसंधान संस्थाओं के प्रकाशन से
  - ✓ आयोग एवं समितियों के रिपोर्ट से
  - ✓ व्यापारिक संघों के प्रकाशन से
- **अप्रकाशित स्रोत से :** आंकड़ों के वे सभी स्रोत जो किसी अन्य अनुसंधान कर्ता द्वारा संकलित किए गए है, और जिन्हें प्रकाशित नहीं किया गया है अप्रकाशित स्रोत के आँकड़ें कहलाते हैं ।

  ये आँकड़ें सरकार, विश्वविद्यालय, निजी संस्थाएँ तथा व्यक्तिगत अनुसंधान कर्ता आदि से प्राप्त किए जा सकते है जो विभिन्न उद्देश्यों के लिए आँकड़ें संकलित करते रहते हैं । ये वे आँकड़े होते है जिन्हें प्रकाशित नहीं कराया जाता |

आकड़ों का वर्गीकरण :

आँकड़ों का वर्गीकरण वह प्रक्रिया जिसके द्वारा आँकड़ों को उनकी समानता और असमानता के आधार पर विभिन्न वर्गों में विभाजन किया जाता है, वर्गीकरण कहलाता है ।

वर्गीकरण के उदेश्य :

- आँकड़ों को सरल एवं संक्षिप्त बनाना ।
- आँकड़ों की समरूपता को प्रकट करके उनकी उपयोगिता को बढ़ाना ।
- आँकड़ों को विभेदकारी बनाना ताकि उनके विशिष्ट अंतर को समझा जा सके ।
- आँकड़ों को तुलना योग्य या अनुमान योग्य बनाना ।
- वैज्ञानिक आधार प्रदान करना ताकि उनकी विश्वसनीयता बढे ।
- आकर्षक और प्रभावशाली बनाना ।

आँकड़ों का वर्गीकरण का आधार :

- भौगोलिक आधार पर
- समयानुसार वर्गीकरण
- गुणात्मक वर्गीकरण
  - ✓ साधारण वर्गीकरण
  - ✓ बहुगुणी वर्गीकरण
- मात्रात्मक या संख्यात्मक वर्गीकरण

चर की अवधारणा

- किसी तथ्य की वह विशेषता या प्रक्रिया जिसे संख्याओं के रूप में मापा जा सकता है, चर कहलाती है ।
- चर दो प्रकार के होते है ।
  - ✓ **विविक्त या खंडित चरः** इनके मान पूर्णांक में होते है, भिन्नात्मक नहीं होते है ।

    उदाहरण : क्रिकेट देखने वालों की उम्र (वर्ष में): 23, 24, 30, 32, 38, 40..... इत्यादि
  - ✓ **अखंडित चर :** इनका मान भिन्नात्मक होते है ।

    जैसे : ग्यारहवी के 10 विद्याथियों की लम्बाई 5'1", 5'2", 4'8", 4'9", 5'3", 5'5"...... इत्यादि ।

शुद्ध आँकडे : वे आँकडे जिन्हें एक अनुसंधान कर्ता अपने अनुसंधान के दौरान संकलित करता है, जो अव्यवस्थित रूप में होते है, शुद्ध आंकड़े कहलाते है ।

आकड़ों का प्रस्तुतीकरण :

- आकड़ों को एकत्रित करने के बाद ही अन्वेषक को इन आकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए उपयुक्त विधियों का चयन करना होता हैं जो आकड़ों को अर्थपूर्ण एवं सरलता से समझाया जा सकता हैं । और एक बार में ही उसके लक्षणों को जाना जा सकता हो ।
- आकड़े जिस प्रकार तथा जिस रूप से प्राप्त हो उसी क्रम मे संकलित किए जाएँ तो इन्हे **"यथा प्राप्त आकड़े (Raw Data)"** कहते हैं ।

  उदाहरण : 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए अंक

  62 75 65 40 35 70 25 20 36 55

  यदि उक्त आँकड़ों को आरोही (छोटे से बड़े) या अवरोही (बड़े से छोटे) के क्रम में रखा जाये तो और सरलता से अधिकतम व न्यूनतम अंक प्राप्त कर सकते हैं। आँकड़ों का आरोही क्रम इस प्रकार है

  20 25 35 36 40 55 62 65 70 75

  इस प्रकार हम स्पष्ट देख सकते हैं कि न्यूनतम प्राप्तांक 20 और अधिकतम प्राप्तांक 75 है।
- **परिसर (Range) :** आकड़ों के अधिकतम व न्यूनतम मानों के अंतर को आकड़ों का परिसर कहा जाता हैं ।

  उदाहरण : यहाँ पर परिसर $75 - 20 = 55$ है।

आकड़ों का सारणी रूप मे प्रस्तुतीकरण :

उदाहरण : एक विद्यालय की दसवीं कक्षा के 20 छात्रों के विज्ञान की अर्द्धवार्षिक परीक्षा में 10 में से प्राप्त अंक क्रमशः निम्न प्रकार है—

5 4 3 4 5 8 4 3 8 2

4 5 4 3 8 5 3 4 2 8

उपरोक्त आकड़ों का प्रयोग करके आकड़ों की एक व्यवस्थित सारणी बनाई जाए तो

प्राप्तांक	बारम्बारता (f)
2	2
3	4
4	6
5	4
8	4

$$\Sigma f = 20$$

- किसी अंक की जितनी बार आवृत्ति होती है वह उस अंक की **बारम्बारता** (**Frequency**) कहलाती है। " इसे " ***f*** " से निरूपित करते हैं।
- उपरोक्त बारम्बारता बंटन को अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी(ungrouped frequency distribution table) कहा जाता है।
- यदि आँकड़ों की संख्या बहुत अधिक हो तो आँकड़े को समूहों में रखकर छोटा कर लेते हैं इन समूहों को **वर्ग (classes)** कहा जाता है और इनके माप को **'वर्ग अंतराल' (class interval)** का **वर्गमाप (class size)** या **वर्ग चौड़ाई (class width)** कहा जाता है।
- प्रत्येक वर्ग की निम्नतम संख्या को **निम्न वर्ग सीमा (Lower class limit)** और **अधिकतम संख्या को ऊपरी वर्ग सीमा** (upper class limit) कहा जाता है।

उदाहरण : वन महोत्सव के दौरान 30 विद्यालयों में से प्रत्येक विद्यालय में 50 पौधे लगाए गए। एक महीने बाद लगाए गए पौधों में से बच गए पौधों की संख्या निम्न थी

22 6 48 0 28 22 17 10 32 6

22 22 28 26 17 36 10 22 28 0

28 22 48 32 10 48 25 36 6 32

सारणी	
बचे हुए पौधों की संख्या	विद्यालयों की संख्या (बारम्बारता)
0-10	8
11-20	2
21-30	12

31-40	5
41-50	3
कुल योग	$\sum f = 30$

उपरोक्त आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण की इस विधि को **वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी (Grouped Frequency Distribution Table)** कहा जाता है।

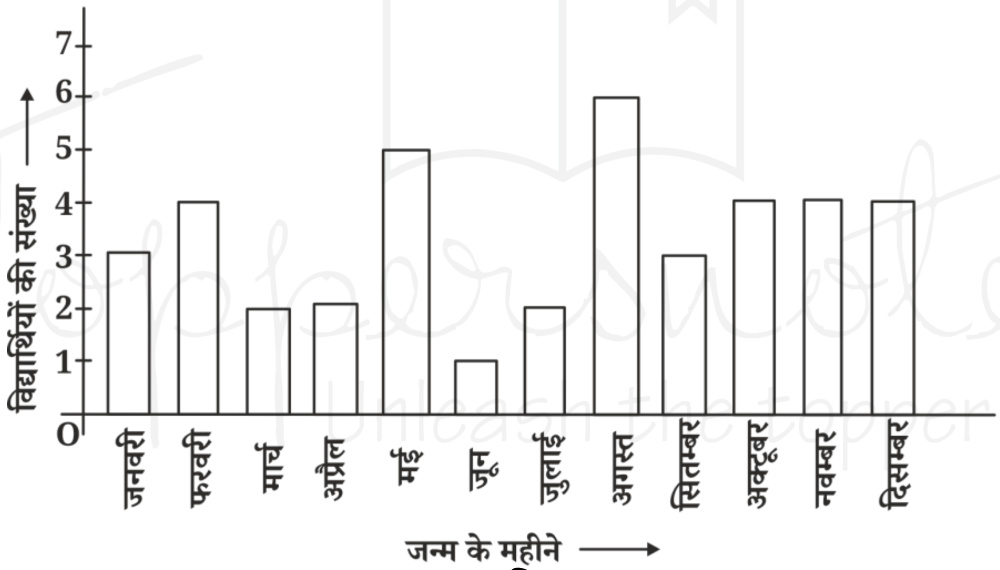
आकड़ों का आलेखीय प्रस्तुतीकरण :

आकड़ों का आलेखीय निरूपण तीन प्रकार से करते हैं –

1. दंड आलेख
2. आयत चित्र
3. बारंबारता बहुभुज

दंड आलेख : दण्ड आलेख आँकड़ों का एक चित्रीय निरूपण होता है जिसमें प्रायः एक अक्ष (मान लीजिए x—अक्ष) पर एक चर को प्रकट करने वाले एक समान चौड़ाई के दण्ड खींचे जाते हैं जिनके बीच में बराबर—बराबर दूरियाँ छोड़ी जाती हैं। दूसरे चर के मान दूसरे अक्ष (मान लीजिए y—अक्ष) पर दिखाए जाते हैं दण्डों की ऊँचाइयाँ चर के मानों पर निर्भर करती हैं ।

उदाहरण :



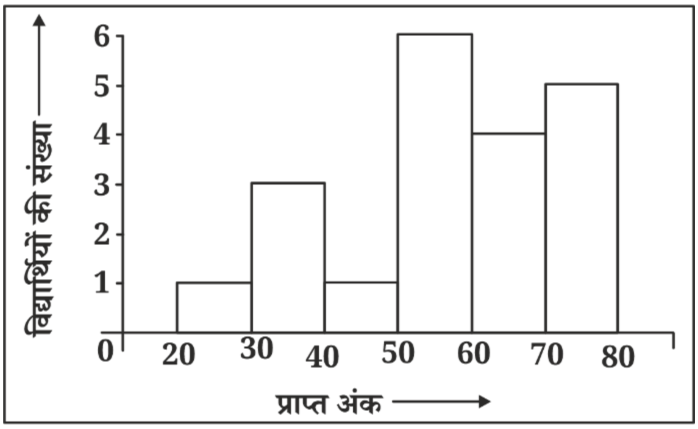
आयत चित्र :

- एक आयतचित्र एक ऊर्ध्वाधर दंड आलेख होता हैं, जिसमे डंडों के बीच मे कोई रिक्तता नहीं होती हैं ।
  - ✓ वर्गीकृत आकड़ों के वर्गों को क्षैतिज अक्ष के अनुदिश लेते हैं ।
  - ✓ ऊर्ध्वाधर अक्ष पर, संगत बारंबारताएँ लेते हैं तथा उचित स्केल दोनों अक्षों पर लेते हैं ।
  - ✓ प्रत्येक वर्ग के लिए, एक आयत खींचा जाता है, जिसका आधार उस वर्ग की चौड़ाई होता है, तथा ऊँचाई वर्ग बारंबारता से निर्धारित की जाती है। आयतों के क्षेत्रफल उनकी संगत बारंबारताओं के समानुपाती होते हैं।

उदाहरण: किसी कक्षा टेस्ट में 20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का बंटन निम्न है:

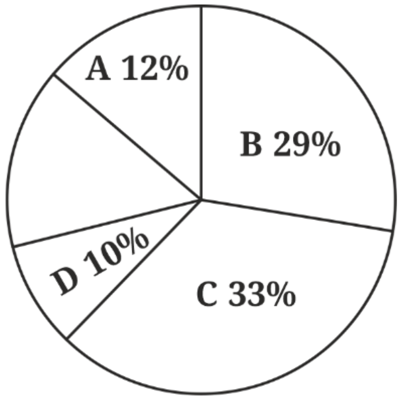
प्राप्त अंक	$20-30$	$30-40$	$40-50$	$50-60$	$60-70$	$70-80$
विद्यार्थियों की संख्या	1	3	1	6	4	5

➢ इन आँकड़ों के लिए एक आयतचित्र खींचिए।



पाई चार्ट या वृत्तीय आलेख :

➢ जब दिए गए आकड़ों का वृत्तीय कोणीय निरूपण किया जाता हैं तो उसे वृत्तीय आलेख कहते हैं ।

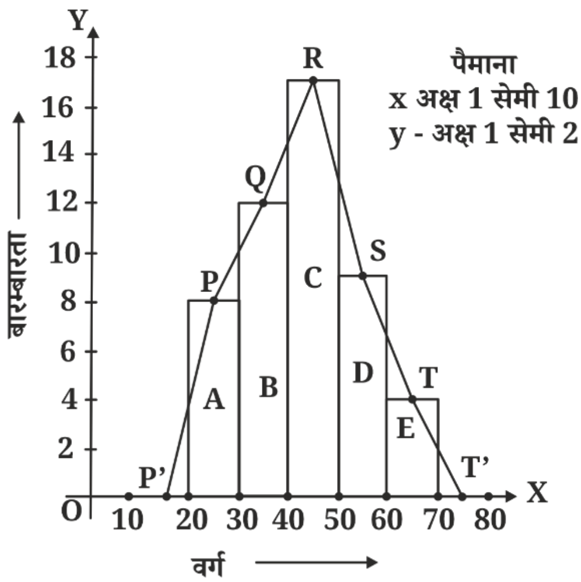


➢ इसमे डाटा को चार प्रकार से निरूपित किया जा सकता हैं –

- ✓ **कोण के रूप मे :** वृत्त को 3.6°(360/100) के 100 समान भागो में बाँटा जा सकता है। प्रत्येक घटक कोणीय मान को वृत्त में प्रस्तुत करने के लिए उसके प्रतिशत भाग को 3.6° से गुणा कर के प्राप्त किया जाता है।
- ✓ **प्रतिशत के रूप मे :** वृत्तीय चित्र वर्ग के निरपेक्ष मूल्य से नहीं बनाया जाता है। प्रत्येक वर्ग का मूल्य कुल मूल्य के प्रतिशत में प्रस्तुत किया जाता है।
- ✓ **भिन्न के रूप मे**

बारंबारता बहुभुज

आवृत्ति बहुभुज चार या चार से अधिक रेखाओं से घिरी हुई होती है। यह आयत चित्र का विकल्प है और आयत चित्र से ही प्राप्त किया जाता है। एक आवृत्ति बहुभुज आयतचित्र के अनुरुप बनाया गया वक्र है। इसे बनाने की सबसे सामान्य विधि है आयतचित्र के शीर्ष मध्य बिन्दुओं को सरल रेखा द्वारा मिलाते हुए दोनों सिरों को बढ़ाकर आधार रेखा तक बन्द कर दिया जाता है।



कालिक श्रृंखला ग्राफ या रेखीय ग्राफ –

आंकड़ों के चित्रीय प्रस्तुतीकरण की रेखीय ग्राफ विधि को कालिक श्रृंखला ग्राफ विधि भी कहा जाता है। इसमें समय (घंटा, मिनट, सेकण्ड, दिन, महीना, वर्ष इत्यादि) को X-अक्ष पर अंकित किया जाता है तथा आश्रित चर को Y अक्ष पर अंकित किया जाता है तथा आश्रित चर को Y-अक्ष पर अंकित किया जाता है। इस प्रकार प्राप्त इन बिन्दुओं को सरल रेखा से मिलाने पर रेखीय ग्राफ प्राप्त किया जाता है। यह सामयिक चलन (ट्रेड) या रुझान को समझने में सहायक है।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप :

समान्तर माध्य (Arithmetic Mean) :

प्रारम्भिक आँकड़ों से समान्तर माध्य ज्ञात करना (व्यक्तिगत श्रेणी) इस प्रकार के आँकड़ों से समान्तर माध्य प्राप्त करने के लिए सभी आंकड़ों का योग करके उसमें कुल आँकड़ों (समंक) की संख्या का भाग दिया जाता है। इसे औसत भी कहते हैं, अर्थात्

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{आंकड़ों का योग}}{\text{आंकड़ों की संख्या}}$$

यदि किसी चर के मान क्रमशः $x_1, x_2, \ldots, x_n$ हों, तो उनका समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

नोट : Σ ग्रीक वर्णमाला का अक्षर है तथा इसे 'सिग्मा' उच्चारित करते हैं तथा गणित में इसे योग की प्रक्रिया दिखाने के लिये प्रयोग में लाया जाता है। जैसे $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ को प्रकट करता है। अतः

$$\sum_{i=1}^{25} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{25}$$

1. असंतत श्रेणी या असंतत बारम्बारता बंटन से समान्तर माध्य

माना कि चर x के n मानों का बारम्बारता बंटन निम्न प्रकार है -

चर x के मान	:	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
बारम्बारता f	:	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_n

बंटन से यह स्पष्ट है कि चर राशि x के कुल n मानों में से x_1, f_1 बार; x_2, f_2 बार; $\cdots, x_n, f_n$ बार मान प्राप्त करते हैं।

अतः $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$, जहाँ $\sum_{i=1}^{n} f_i = n =$ कुल मानों की संख्या

2. समान्तर माध्य की गणना

x_i	f_i	$f_i x_i$
x_1	f_1	$f_1 x_1$
x_2	f_2	$f_2 x_2$
x_3	f_3	$f_3 x_3$
⋮	⋮	⋮
x_n	f_n	$f_n x_n$
	$\sum f_i$	$\sum f_i x_i$

माध्य $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

3. वर्गीकृत (समूहित) बारम्बारता बंटन से समान्तर माध्य :

वर्ग अंतराल $(x_1 - x_2)$	$x_i = \frac{x_1+x_2}{2}$	f_i **(बारम्बारता)**	$f_i x_i$
$x_1 - x_2$	$x_i = \frac{x_1+x_2}{2}$	f_1	$f_1 x_i$
$x_2 - x_3$	$x_j = \frac{x_2+x_3}{2}$	f_2	$f_2 x_j$
$x_3 - x_4$	$x_k = \frac{x_3+x_4}{2}$	f_3	$f_3 x_k$
.	.	.	.
.	.	.	.
		$\sum f_i$	$\sum f_i x_i$

माध्य $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

उदाहरण :

अन्तराल (प्राप्तांक)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
प्राप्तांक	5	15	25	35	45
बारम्बारता	5	8	20	14	3

इससे पूर्व में बताई गई विधि द्वारा निम्नानुसार माध्य प्राप्त करते है -

x_j	f_i	$f_i x_j$
5	5	25
15	8	120
25	20	500
35	14	490
45	3	135
योग	$\sum f_i = 50$	$\sum f_i x_j = 1270$

अतः अभीष्ट समान्तर मान्य $\bar{x} = \frac{\sum f_j x_i}{\sum f_i}$

$= \frac{1270}{50}$

$= 25.4$ अंक

4. कल्पित माध्य की सहायता से समान्तर माध्य :

$$\bar{x} = A + \frac{1}{N}(\sum f_i d_i), \text{ जहाँ } N = \sum f_i$$

x_i	f_i	$d_j = x_i - A$	$f_i d_i$
x_1	f_1	d_1	$f_1 d_1$
x_2	f_2	d_2	$f_2 d_2$
x_3	f_3	d_3	$f_3 d_3$
x_k	f_k	d_k	$f_k d_k$
	$N = \sum f_i$		$\sum f_i d_i$

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

$$= A + \frac{1}{N}\left(\sum f_i d_i\right)$$

यदि पद II में $u_i = \frac{x_i - A}{h}$ से पद विचलन (step deviation) ज्ञात किया जाय, जहाँ h विचलनो का सार्व गुणनखण्ड है तो पद III के अनुसार कॉलम तीन में $f_i u_i$ अर्थात् बारम्बारता f_i तथा u_i का गुणनफल लिखेंगे। तब निम्न सूत्रानुसार माध्य ज्ञात करेंगे

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$$

महत्वपूर्ण नोट:

- सामान्यतः कल्पित माध्य A, चर x के मध्य के मान को अथवा अधिकतम बारम्बारता वाले मान को लिया जाता है।
- जब x के मानों में अन्तर अधिक तथा मान बड़ा हो या बारम्बारता अधिक हो तो गणितीय परिकलन सरल करने के लिये पद विचलन $u_i = \frac{x_i - A}{h}$

$\boldsymbol{x_j}$	$\boldsymbol{f_i}$	$\boldsymbol{u_i = \frac{x_i - A}{h}}$	$\boldsymbol{f_i u_j}$
x_1	f_1	u_1	$f_1 u_1$
x_2	f_2	u_2	$f_2 u_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k	u_k	$f_k u_k$
योग	$\sum f_i$		$\sum f_i u_i$

अतः समान्तर माध्य $(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{A} + \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \times \boldsymbol{h}$

माध्यक (Median) :

- यदि किसी चर राशि x के n मानों को आरोही (ascending) या अवरोही (descending) क्रम में रखा जाय, तो इस श्रेणी के मध्य पद को श्रेणी की माध्यक कहेंगे।
- यदि पदों की **संख्या विषम** है तो मध्य में **एक ही पद** $\left(\frac{n+1}{2}\right.$ **वां**) होगा।
- यदि पदों की **संख्या सम** हो तो मध्य **में दो पद होंगे** $\left(\frac{n}{2}\right.$ **वां एवं** $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ **वां**) तथा माध्यक उन दोनों पदों का औसत होगी।

उदाहरण: कक्षाA के 9 छात्रों के प्राप्तांक 10,15,12,18,17,18,15,16,19 हैं तथा कक्षा B के 8 छात्रों के प्राप्तांक 19,15,18,14,17,16,15,15 है।

इनको आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर -

A :	10	12	15	15	16	17	18	18	19
B:	14	15	15	15	16	17	18	19	

A का माध्यक = मध्य पद (5 वाँ पद) = 16 अंक

$$\text{B का माध्यक} = \text{मध्य पदों का औसत} \left(\frac{\frac{4 \textbf{ वां पद } + 5 \text{ वाँ पद}}{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{15 + 16}{2} = 15 \cdot 5 \text{ अंक}$$

1. अवर्गीकृत या व्यक्तिगत श्रेणी से माध्यक :

✓ पद I. चर x के n मानों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम जैसे $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ में लिखना।

✓ पद II. अब निम्न सूत्र के अनुसार माध्यक ज्ञात कीजिए -

$$\text{माध्यक } (M) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} \text{ वाँ पद अर्थात् } x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ यदि } n \text{ विषम संख्या हो} \\ \dfrac{n}{2} \text{ वें व } \dfrac{n}{2}+1 \text{ वें पदों का औसत अर्थात् } \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, \text{ यदि } n \text{ सम संख्या हो} \end{cases}$$

उदाहरण : निम्न आंकडों से माध्यक ज्ञात कीजिए।

25,34,31,23,22,26,35,28,20,32

हल : दिये गए ऑकडों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

क्र. सं.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
चर का मान (x)	20	22	23	25	26	28	31	32	34	35

यहाँ कुल पद $(n) = 10$ (सम संख्या)

$$\text{अतः माध्यक } (M) = \frac{\frac{10}{2} \text{ वां पद} + \left(\frac{10}{2}+1\right) \text{ वां पद}}{2}$$

$$= \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{26+28}{2} = 27$$

2. अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक

अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात करने की क्रिया विधि निम्नानुसार है -

✓ पद I. संचयी बारम्बारता सारणी (cummulative frequency table) तैयार करना।

✓ पद II. $N/2$ का मान ज्ञात करना, जहाँ $N = \sum f_i$

✓ पद III. $N/2$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता वाला चर मान माध्यक होगी।

उदाहरण : निम्न बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात कीजिए।

x:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f:	8	10	11	16	20	25	15	9	6

हल : माध्यक के लिए गणना

x_i	f_i	c.f.
1	8	8
2	10	18
3	11	29
4	16	45
5	20	65
6	25	90

ToppersNotes Unleash the topper in you

7	15	105
8	9	114
9	6	120

$$N = 120 \text{ यहाँ } \frac{N}{2} = 60.$$

वह पद जिसकी संचयी बारम्बारता 60 से ठीक अधिक अर्थात् संचयी बारम्बारता 65 के संगत पद मान 5 हैं।

अतः माध्यक = 5

3. वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात करने के लिए निम्न क्रिया पद है :

- ✓ पद I: संचयी बारम्बारता सारणी तैयार करना।
- ✓ पद II: $N/2$ ज्ञात कर ठीक अधिक संचयी बारम्बारता वाले वर्ग अन्तराल को ज्ञात करना।
- ✓ पद III: अब इस वर्ग अन्तराल के लिए निम्न सूत्र की सहायता से माध्यक ज्ञात करना।

$$\textbf{माध्यक } (\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{\ell} + \left(\frac{\frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{C}}{\boldsymbol{f_i}}\right) \times \boldsymbol{h}$$

जहाँ
$\ell =$ माध्यक वर्ग निम्न सीमा
$N =$ कुल बारम्बारता $\left(\sum f_i\right)$
$C =$ माध्यक वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी बारम्बारता
$h =$ माध्यक वर्ग का अन्तराल
$f =$ माध्यक वर्ग की बारम्बारता

उदाहरण : निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
f_j	6	20	44	26	3	1

हल:

संचयी बारम्बारता सारणी बनाने पर

वर्ग	f_j	संचयी बारम्बारता (c)
10-25	6	6
25-40	20	26
40-55	44	70
55-70	26	96
70-85	3	99
85-100	1	100

$N = 100$

यहाँ $\frac{N}{2} = 50$ अतः माध्यक वर्ग अंतराल " $40 - 55$ " है तथा

यहाँ संगत $\ell = 40, C = 26, h = 15$ व $f = 44.$

$$\therefore \text{ माध्यक } (M) = \ell + \frac{\left(\frac{N}{2} - c\right)}{f} \times h$$

$$= 40 + \frac{(50 - 26)}{44} \times h$$

$$= 40 + \frac{24}{44} \times 15$$

$$= 48.18$$

अतः माध्यक $48 - 18$ है।

बहुलक (Mode) :

किसी श्रेणी का वह मूल्य जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है, बहुलक कहलाता है। इसके पास श्रेणी के पदों के केन्द्रित होने की प्रवृति सबसे अधिक होती है।

1. व्यक्तिगत श्रेणी या अवर्गीकृत श्रेणी से बहुलक

- ✓ इस श्रेणी से पहले बारम्बारता बंटन सारणी तैयार करते हैं।
- ✓ जिस मूल्य (समंक) की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वही मूल्य (समंक) श्रेणी का बहुलक (Mode) कहलाता है।

उदाहरण :

प्राप्तांक	0	1	2	3	4	5
छात्रों की संख्या	5	8	13	5	3	2

यहाँ बारम्बारता बंटन से स्पष्ट है कि प्राप्तांक 2 की बारम्बारता सबसे अधिक 13 है, अतः बंटन का बहुलक प्राप्तांक 2 होगा।

2. अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन से बहुलक:

- ✓ यहाँ नियमित बारम्बारता बटन से जिस पद मूल्य की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वहीं पद मूल्य बहुलक होता है।

उदाहरणः कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नानुसार है इनका बहुलक ज्ञात कीजिए -

प्राप्तांक	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
विद्यार्थियों की संख्या	1	5	15	16	20	19	15	8	7	3	2

हल: यहाँ प्राप्तांक 34 की बारम्बारता सबसे अधिक 20 है।

अतः बहुलक $= 34$ अंक

3. वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से बहुलक

✓ वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से बहुलक निकालने के लिये निम्न क्रिया पद है -

- पद I: वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के जिस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक होती है, उसे बहुलक वर्ग कहते हैं। सर्य प्रथम बहुलक वर्ग को ज्ञात करते हैं।
- पद II: बहुलक वर्ग के माध्यम से निम्न सूत्र का प्रयोग करते हुए बहुलक ज्ञात करते है-

$$\textbf{बहुलक} = \boldsymbol{\ell} + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times \boldsymbol{h}$$

जहाँ ℓ = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पूर्व वर्ग की बारम्बारता

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारम्बारता

h = बहुलक वर्ग का अन्तराल

उदाहरण : निम्न बारम्बारता बंटन से बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
f_i	6	20	44	26	3	1

हल: यहाँ सबसे अधिक बारम्बारता 44 , वर्ग '40-50' की है।

इस प्रकार बहुलक वर्ग $= 40 - 50$

पुनः $\ell = 40, f_1 = 44, f_0 = 20, f_2 = 26$ तथा $h = 15$

$$\text{सूत्र के अनुसार बहुलक} = \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{44 - 20}{88 - 20 - 26}\right) \times 15 = 48.57$$

अतः अभीष्ट बहुलक $= 48.57$

प्रकीर्णन की माप (Measure of Dispersion) :

- ➢ किसी श्रेणी के पदों का माध्य से बिखराव प्रकीर्णन कहलाता हैं ।
- ➢ किसी श्रेणी का प्रकीर्णन उसके विभिन्न पदो के विचरण या अंतर का माप हैं ।
- ➢ प्रकीर्णन की माप दो प्रकार से की जाती हैं –

1. **निरपेक्ष माप :** प्रक्रीर्णन की सीमा या मात्रा बताने वाली संख्या निरपेक्ष होती हैं । प्रकीर्णन के वे माप जिनकी इकाई वही होती हैं जो चर के विभिन्न मानों की होती हैं वे निरपेक्ष माप कहलाते है ।
2. **सापेक्ष माप** : प्रकीर्णन के सापेक्ष माप अनुपात या प्रतिशत मे ज्ञात होते हैं, अत: यह चर के विभिन्न मानों की इकाई पर निर्भर नहीं करते हैं । प्रकीर्णन का सापेक्ष माप, निरपेक्ष माप व माध्य जिससे प्रकीर्णन ज्ञात किया गया हैं, का अनुपात होता हैं । सापेक्ष माप को **प्रकीर्णन गुणांक** भी कहते हैं ।

<u>परास या विस्तार (Range) :</u>

a. चरम मानों पर आधारित परास : श्रेणी में चर के उच्चतम मान (H) और निम्नतम मान (L) के अन्तर को परास (R) या विस्तार कहते हैं।

उदाहरण : यदि एक कक्षा के विद्यार्थियों में सबसे लम्बे विद्यार्थी की लम्बाई 72 इंच तथा सबसे छोटे विद्यार्थी की लम्बाई 58 इंच है, तो कक्षा में विद्यार्थियों की लम्बाई का परास $72 - 58 = 14$ इंच होगा।

नोट : यदि चर संतत श्रेणी के रूप में दिये गये हों, तो सबसे बड़े वर्ग की उच्च सीमा तथा सबसे छोटे वर्ग की निम्न सीमा का अन्तर ही **परास** कहलाता है। परास वास्तव में प्रकीर्णन का एक निरपेक्ष (absolute) मान है, जो चर मूल्यों के केवल चरम मानों पर ही निर्भर करता है ।

परास गुणांक (Coefficient of range) (C.R.) $= (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{L})/(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{L})$

ऊपर दिये गए उदाहरण के लिए परास गुणांक (C.R.) $= \frac{H-L}{H+L} = \frac{35-5}{35+5} = \frac{30}{40} = .75$ या 75%

b. अन्तर चतुर्थक परास (Inter-Quartile Range) : चर श्रेणी के तृतीय और प्रथम चतुर्थकों के अन्तर को अन्तर-चतुर्थक परास कहते हैं। यह परास की अपेक्षा अधिक प्रतिनिधित्व करने वाला माप है। इसे बंटन के मध्यवर्ती 50% (Middle 50%) मूल्यों का परास भी कहते हैं।

$$\text{अन्तर चतुर्थक परास (I.Q.R.)} = Q_3 - Q_1$$

$$\text{अन्तर चतुर्थक परास गुणाँक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

जहाँ Q_3 तथा Q_1 की गणना निम्न सूत्रों से करते हैं

$$Q_1 = \ell + \frac{(N/4) - F}{f} \times h, Q_3 = \ell + \frac{3(N/4) - F}{f} \times h$$

यहाँ ℓ चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा, h वर्ग अन्तराल, F चतुर्थक वर्ग के पूर्व वर्ग की संचयी बारम्बारता, f चतुर्थक वर्ग की बारम्बारता तथा N पदों की कुल संख्या है।

c. दशमक एवं शतमक परास (Decile and percentile range) : चर श्रेणी की सम्पूर्ण बारम्बारताओं को दस समान भागों में विभाजित करने वाले विभाजन मूल्य को दशमक तथा सम्पूर्ण बारम्बारताओं को सौ बराबर भागों में विभाजित करने वाले विभाजन मूल्य को शतमक कहते हैं।

$$\text{दशमक परास} = D_9 - D_1$$

जहाँ i वाँ दशमक $D_i = l + \frac{(i(N/10) - F)}{f} \times h, i = 1,2,3, \dots ,9$

शतमक परास चर श्रेणी के मध्यवर्ती 80% सामान्य पदों पर आधारित होता है। यह 90 वाँ और 10 वाँ शतमक अंतर होता है जिसे **शतमक परास** कहते है।

शतमक परास $= P_{90} - P_{10}$

जहाँ i वाँ दशमक $P_i = l + \frac{(i(N/100) - F)}{f} \times h, i = 1,2,3, \dots ,99$

उदाहरण : निम्न बारम्बारता बंटन से अन्तर चतुर्थक परास एवं चतुर्थक परास गुणांक, दशमक परास एवं शतमक परास की गणना कीजिए :

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	1	8	12	6	3

हल : दिए गए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0-10	1	1
10-20	8	9
20-30	12	21
30-40	6	27
40-50	3	30

चतुर्थक परास की गणना :

$$Q_3 = \ell + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - F}{f} \times h = 30 + \frac{3 \times \left(\frac{30}{4}\right) - 21}{6} \times 10 = 30 + \frac{1 \cdot 5 \times 10}{6}$$

$= 30 + 2 \cdot 5 \ = 32 \cdot 5$

$$Q_1 = \ell + \frac{\left(\frac{N}{4}\right) - F}{f} \times h = 10 + \frac{\left(\frac{30}{4}\right) - 1}{8} \times 10 = 10 + \frac{6 \cdot 5 \times 10}{8}$$

$= 10 + 8 \cdot 12 = 18 \cdot 12$

अन्तर चतुर्थक परास

$= Q_3 - Q_1 = 32 \cdot 5 - 18 \cdot 12 = 14 \cdot 38$

अन्तर चतुर्थक परास गुणाँक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{32.5 - 18.12}{32.5 + 18.12} = \frac{14.38}{50.62} = 0.284$

दशमक परास की गणना :

$\frac{9N}{10} = \frac{9 \times 30}{10} = 27$

27 के बराबर या इससे ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 27 है जिसके संगत वर्ग $30 - 40$ है

$\therefore \ l = 30, f = 6, F = 21, h = 10$

अत: $D_9 = 30 + \frac{9 \times (30/10) - 21}{6} \times 10 = 30 + \frac{6 \times 10}{6} = 30 + 10 = 40$

पुन: $\frac{1N}{10} = \frac{1 \times 30}{10} = 3$

3 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 9 है जिसके संगत वर्ग $10 - 20$ है

$\therefore \ l = 10, f = 8, F = 1, h = 10$

अत: $D_1 = 10 + \frac{1 \times (30/10) - 1}{8} \times 10 = 10 + \frac{2 \times 10}{8} = 10 + 2 \cdot 5 = 12 \cdot 5$

$\therefore$ दशमक परास $= D_9 - D_1 = 40 - 12 \cdot 5 = 27 \cdot 5$

शतमक परास की गणना :

$$\frac{90\text{ N}}{100} = \frac{90 \times 30}{100} = 27$$

27 के बराबर या इससे ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 27 है जिसके संगत वर्ग $30 - 40$ है

$\therefore\ l = 30, f = 6, F = 21, h = 10$

अतः $\frac{10N}{100} = \frac{10\times30}{100} = 3$

$$P_{90} = 30 + \frac{90 \times (30/100) - 21}{6} \times 10 = 30 + \frac{6 \times 10}{6} = 30 + 10 = 40$$

3 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 9 है जिसके संगत वर्ग $10 - 20$ है

$\therefore\ l = 10, f = 8, F = 1, h = 10$

अत: $P_{10} = 10 + \frac{10\times(30/100)-1}{8} \times 10 = 10 + \frac{2\times10}{8} = 10 + 2 \cdot 5 = 12 \cdot 5$

$\therefore$ शतमक परास $= P_{90} - P_{10} = 40 - 12 \cdot 5 = 27 \cdot 5$

चतुर्थक विचलन (Quartile deviation) :

- चतुर्थक विचलन तृतीय और प्रथम चतुर्थकों के अन्तर का आधा होता है। अन्तर चतुर्थक परास का आधा मूल्य चतुर्थक विचलन होता है। इसी कारण इसे अर्द्ध-अन्तर चतुर्थक परास (Semi-inter quartile range) भी कहते है ।

$$\text{चतुर्थक विचलन (Q.D.)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

- **चतुर्थक विचलन गुणांक (Coefficient of quartile deviation):** चतुर्थक विचलन प्रकीर्णन का निरपेक्ष माप है। दो या अधिक चर श्रेणियों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए सापेक्ष माप ज्ञात करना पड़ता है। इसे चतुर्थक विचलन का गुणांक कहते हैं ।

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणाँक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

उदाहरण 1 : 31 छात्रों की लम्बाई इंचों में दी गई हैं : 55,56,57,57,58,58,59,59,60,60,60, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 63, 64, 64, 65, 65, 65, 66, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 70 इनका चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ कुल पद 31 हैं

श्रेणी का प्रथम चतुर्थक $Q_1 = \frac{31+1}{4} = 8$, अतः 8 वें पद का मूल्य $= 59$

श्रेणी का तृतीय चतुर्थक $Q_3 = \frac{3(31+1)}{4} = 24$, अतः 24 वें पद का मूल्य $= 66$

इसलिए चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{66-59}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

संतत श्रेणी में चतुर्थक विचलन निकालने की विधि वही है जो सामान्य श्रेणी में होती है। इसमें Q_1 तथा Q_3 की गणना निम्न सूत्रों से करते हैं

$$Q_1 = \ell + \frac{(N/4) - F}{f} \times h \quad \text{तथा} \quad Q_3 = \ell + \frac{(3N/4) - F}{f} \times h$$

जहाँ ℓ = चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा, h = वर्ग अन्तराल, N = कुल बारम्बारता, f = चतुर्थक वर्ग की बारम्बारता, F = चतुर्थक वर्ग के पूर्व वाले वर्ग की संचयी बारम्बारता है।

उदाहरण 2: निम्न बारम्बारता बंटन का चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए :

मजदूरी (रु. में)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारम्बारता	11	26	63	81	35	21	13

हल :

मजदूरी	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
30-40	11	11
40-50	26	37
50-60	63	100
60-70	81	181
70-80	35	216
80-90	21	237
90-100	13	250

$\frac{N+1}{4} = \frac{(250+1)}{4} = \frac{251}{4} = 62.75$ वें पद का मूल्य

$Q_1 = 50 + \frac{62.75 - 37}{63} \times 10 = 50 + \frac{25.75}{63} \times 10 = 54.09$

$\frac{3(N+1)}{4} = \frac{3(250+1)}{4} = \frac{753}{4} = 188.25$ वें पद का मूल्य

$Q_3 = 70 + \frac{188.25 - 181}{35} \times 10 = 70 + \frac{7.25}{35} \times 10 = 72.07$

अतः चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{72\cdot07 - 54\cdot09}{2} = 8.99$

तथा चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{72\cdot07 - 54\cdot09}{72\cdot07 + 54\cdot09} = \frac{17\cdot98}{126\cdot16} = \cdot 14$

माध्य विचलन (Mean Deviation) :

- किसी भी श्रेणी में चर के विभिन्न मानों का, उसके सांखिकीय माध्य (समान्तर माध्य, माध्यिका एवं वहुलक) से लिए गए विचलनों के निरपेक्ष मानों का **समान्तर माध्य उसका माध्य विचलन** कहलाता है।
  - ✓ **जब आकड़े अवर्गीकृत हो :** यदि किसी चर के मान $x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n$ हों तथा इनका सांस्थिकीय माध्य A हो तो A से माध्य

    विचलन $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - A|$

    यहाँ $|x_i - A|, x_i$ का A से विचलन का निरपेक्ष मान है अर्थात् $|x_i - A|$ का अर्थ है कि $x_i - A$ का मान सदैव धनात्मक ही लेना है।
  - ✓ **अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए :** यदि चर के विभिन्न मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ की बारम्बारताएं क्रमशः $f_1, f_2, \ldots .. f_\varepsilon$ हों तथा A इसका सांख्यिकी माध्य हो, तो

    A से माध्य विचलन $= \frac{1}{N}\Sigma f_i|x_i - A|$. जहाँ $N = \Sigma f_i$.

- ✓ **वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए :** वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए उपरोक्त सूत्र (2) का ही उपयोग किया जाता है। यहां $x_f x_y x_y, \ldots x_v$ प्रत्येक वर्ग के मध्यमान को प्रदर्शित करता है ।
- ✓ माध्य विचलन गुणांक (Coefficient of mean deviation): $= \frac{\text{माध्य विचलन}}{A}$

माध्य से माध्य विचलन ज्ञात करने की विधि :

1. जब आकड़े अवर्गीकृत हों, परिकलन विधि :

- ✓ माध्य $\bar{x}$ से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोडकर) ज्ञात कीजिए ।

$$\text{माध्य } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

- ✓ इन विचलनों का योग ज्ञात कीजिए
- ✓ अब (ii) में प्राप्त योग को पदों की संख्या से भाग देकर विचलन ज्ञात कीजिए ।

$$\text{माध्य विचलन } = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

उदाहरण : एक कक्षा के 8 छात्रों का भार किग्मा में निम्नलिखित प्रकार से है भार किगा: 42,47,52, 47. 37,60,55,38 माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

x_i	$\|x_i - \bar{x}\|$
42	$5 \cdot 25$
47	0.25
52	$4 \cdot 75$
47	$0 \cdot 25$
37	$10 \cdot 25$
60	$12 \cdot 75$
55	7.75
38	$9 \cdot 25$
$\sum x_i = 378$	$\Sigma\|x_i - \bar{x}\| = 50.50$

माध्य $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{378}{8} = 47 \cdot 25$

माध्य विचलन $= \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{50.50}{8} = 6.31$

2. अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए परिकलन विधि :

- ✓ माध्य x से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए ।

  यहाँ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N}, N = \sum f_i,$
- ✓ अब (i) में प्राप्त विचलनों को उनकी संगत बारम्बारता से गुणा कर उनका योग ज्ञात कीजिए ।
- ✓ अब (ii) में प्राप्त योग को, बारम्बारताओं के कुल योग से भाग देकर माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N}, \text{ जहाँ } N = \sum f_i$$