Toppersnotes®

Unleash the topper in you

HARYANA – CET

समान पात्रता परीक्षा

हरियाणा कर्मचारी चयन आयोग (HSSC)

भाग - 4

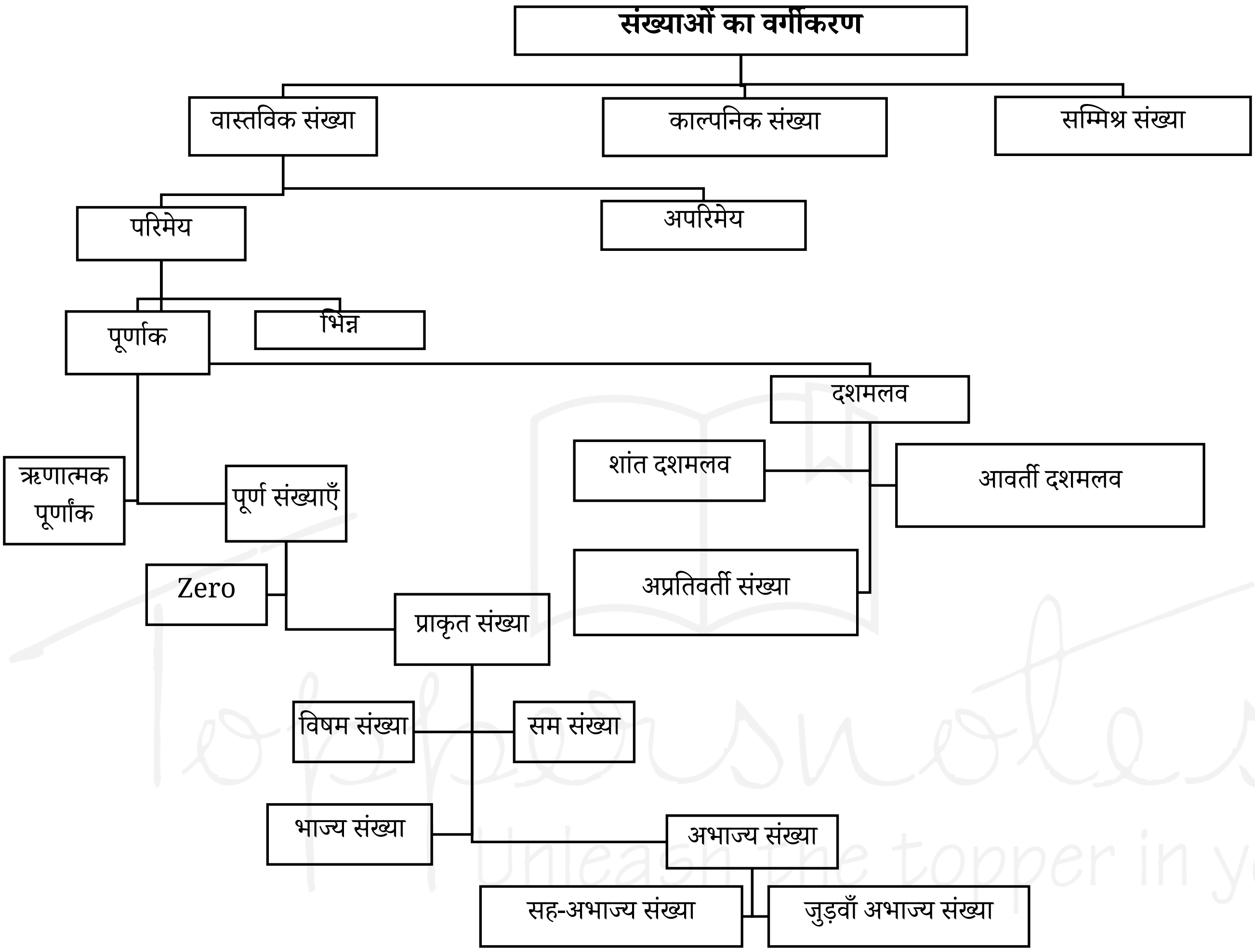
गणित एवं सामान्य विज्ञान

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

1 CHAPTER संख्या पद्धति

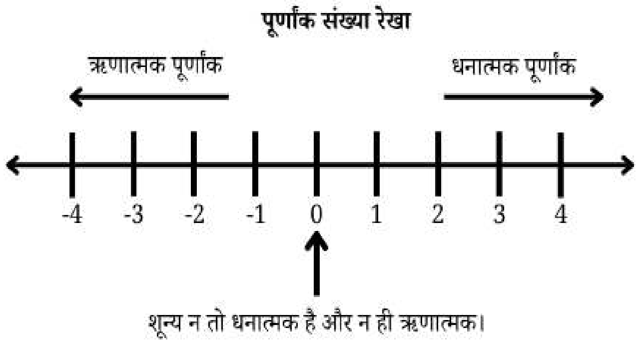
➢ **संख्या पद्धति :** संख्या पद्धति, संख्याओं को दर्शाने और उनके साथ काम करने की एक ऐसी विधि है जिसमें प्रतीकों और नियमों के एक परिभाषित समूह का उपयोग किया जाता है।



Types	Definition
वास्तविक संख्या	एक वास्तविक संख्या कोई भी ऐसी संख्या होती है जिसे संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है। वास्तविक संख्या एक ऐसी संख्या है जिसमें सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ शामिल होती हैं, और जिसे संख्या रेखा पर एक बिंदु के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
परिमेय संख्या	एक परिमेय संख्या वह संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।
अपरिमेय संख्या	एक अपरिमेय संख्या वह संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।
भिन्न	भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी पूर्ण वस्तु के एक भाग को, या दो राशियों के अनुपात को दर्शाती है। इसे $\frac{a}{b}$ के रूप में लिखा जाता है।
पूर्णांक	एक पूर्णांक एक पूर्ण संख्या होती है जो धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकती है, और इसमें कोई भिन्नात्मक या दशमलव भाग शामिल नहीं होता।

ऋणात्मक पूर्णांक	ऋणात्मक पूर्णांक वे पूर्ण संख्याएँ हैं जिनके साथ ऋणात्मक चिह्न होता है, जैसे -1, -2, -3, ...
पूर्ण संख्या	पूर्ण संख्या एक ऋणेतर पूर्णांक है, जिसमें शून्य भी शामिल है।
प्राकृत संख्या	प्राकृतिक संख्याएँ वे संख्याएँ हैं जो 1 से शुरू होती हैं और हर बार 1 से बढ़ती जाती हैं। 1, 2, 3, 4,...
विषम संख्या	एक विषम संख्या वह प्राकृत संख्या है जो 2 से विभाज्य नहीं होती, अथवा $2n + 1$ के रूप में होती है।
सम संख्याएँ	एक सम संख्या वह प्राकृत संख्या है जो 2 से पूरी तरह विभाज्य होती है, या 2n. के रूप में होती है।
अभाज्य संख्या	अभाज्य संख्या एक ऐसी प्राकृत संख्या है जो 1 से बड़ी होती है और जिसके ठीक दो अलग-अलग गुणनखंड होते हैं: 1 और वह संख्या स्वयं। 2, 3, 5, 7. ➢ 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है। ➢ 2 एकमात्र सम अभाज्य संख्या है। ➢ सभी अभाज्य संख्याओं (2 और 3 को छोड़कर) को $6n + 1$या $6n + 5$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है; हालाँकि, इसका विलोम सत्य नहीं है। ➢ (3, 5, 7) तीन अभाज्य संख्याओं का एकमात्र ऐसा समूह है, जो लगातार विषम संख्याएँ हैं। ➢ 101 तीन अंकों की सबसे छोटी अभाज्य संख्या है। ➢ 997 तीन अंकों की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।
भाज्य संख्या	भाज्य संख्या एक ऐसी प्राकृत संख्या है जो 1 से बड़ी होती है और जिसके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं। एक भाज्य संख्या को 1 से, स्वयं से, और कम से कम किसी एक अन्य संख्या से पूरी तरह विभाजित किया जा सकता है। 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14... ➢ सबसे छोटी भाज्य संख्या 4 है। ➢ 9सबसे छोटी विषम भाज्य संख्या 9 है। यदि a और b कोई दो विषम अभाज्य संख्याएँ हैं, तो $a^2 + b^2$ और $a^2 - b^2$ भाज्य संख्याएँ होती हैं।
सह-अभाज्य संख्याएँ	दो या दो से अधिक संख्याओं को सह-अभाज्य (या सापेक्षतः अभाज्य) कहा जाता है, यदि उनका एकमात्र उभयनिष्ठ गुणनखंड (HCF) 1 हो। ➢ 1 न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या।
जुड़वां अभाज्य संख्याएँ	जुड़वां संख्याएँ (जुड़वां अभाज्य) अभाज्य संख्याओं का एक ऐसा जोड़ा होती हैं, जिनका अंतर ठीक 2 होता है। ➢ 5 ही एकमात्र ऐसी अभाज्य संख्या है, जो 2 जुड़वां अभाज्य जोड़ों में शामिल है। (3, 5) (5, 7) ➢ जुड़वां अभाज्य संख्याओं का योग (3 और 5 को छोड़कर) हमेशा 12 से विभाज्य होता है।
दशमलव संख्या	दशमलव संख्या एक ऐसी संख्या होती है जिसमें एक दशमलव बिंदु (.) होता है, और जो एक पूर्ण भाग तथा एक भिन्नात्मक भाग से मिलकर बनी होती है। उदाहरण- 3.5, 12.75 आदि।
शांत दशमलव	एक ऐसी दशमलव संख्या है जो दशमलव बिंदु के बाद अंकों की एक निश्चित संख्या के बाद समाप्त हो जाती है। उदाहरण- 2.5, 0.75

अशांत आवर्ती दशमलव	एक अशांत आवर्ती दशमलव वह दशमलव संख्या है जो कभी समाप्त नहीं होती, और जिसमें दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंक लगातार दोहराए जाते हैं। उदाहरण- 0.333..., 0.1212
अशांत अनावर्ती दशमलव	एक अनन्त और अनावर्ती दशमलव वह दशमलव संख्या है जो कभी समाप्त नहीं होती और दशमलव बिंदु के बाद कोई भी अंक या पैटर्न दोहराती नहीं है। उदाहरण- 1.1412, 3.14
काल्पनिक संख्या	काल्पनिक संख्या वह संख्या होता है जिसे = bi के रूप में लिखा जा सकता है b एक वास्तविक संख्या है i काल्पनिक इकाई है, जिसे इस तरह से परिभाषित किया गया है
सम्मिश्र संख्या	एक सम्मिश्र संख्या वह संख्या है जिसके दो भाग होते हैं—एक वास्तविक भाग और एक काल्पनिक भाग—और जिसे मानक रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है: $z = a + ib$ a -वास्तविक संख्या , जिसे z का वास्तविक भाग कहा जाता है। b एक वास्तविक संख्या है, जिसे z का काल्पनिक भाग कहा जाता है। i काल्पनिक इकाई है, जिसे इस गुणधर्म द्वारा परिभाषित किया जाता है:



अभाज्य संख्या तो पता करना

- यह पता लगाने के लिए कि कोई संख्या अभाज्य है या नहीं, सबसे पहले उसका वर्गमूल (square root) निकालें और उसे निकटतम पूर्ण संख्या तक पूर्णांकित (round down) करें। फिर यह जाँचें कि क्या वह संख्या इस मान तक की किसी भी अभाज्य संख्या से विभाज्य है। यदि वह उनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है, तो वह संख्या एक अभाज्य संख्या है।

के बीच	अभाज्य संख्या
1-50	15
1-100	25
1-200	46

रामानुजन संख्या

रामानुजन संख्या एक ऐसी संख्या है जिसे दो अलग-अलग तरीकों से, दो धनात्मक घनों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसे हार्डी-रामानुजन संख्या या टैक्सी-कैब संख्या के नाम से भी जाना जाता है।

सबसे छोटी रामानुजन संख्या = 1729

$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$

पूर्ण संख्या

पूर्ण संख्या एक ऐसी प्राकृत संख्या है जो अपने उचित भाजकों (अर्थात्, स्वयं उस संख्या को छोड़कर उसके सभी धनात्मक भाजकों) के योग के बराबर होती है।

उदा: 4, 1 और 2 से विभाज्य है, इसलिए $1 + 2 = 3 \neq 4$; अतः, 4 एक पूर्ण संख्या नहीं है।

6, 1, 2 और 3 से विभाज्य है, इसलिए $1 + 2 + 3 = 6 = 6$; अतः, 6 एक पूर्ण संख्या है।

Key points

सम + सम = सम
सम × सम = सम
सम + विषम = विषम
सम × विषम = सम
विषम + विषम = सम
विषम × विषम = विषम

Type 1: परिभाषाओं पर आधारित प्रश्न

उदा: 173 एक अभाज्य संख्या है या नहीं

हल: 173 का वर्गमूल लगभग 13 है। 13 से कम या उसके बराबर अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7, 11 और 13 हैं।

चूँकि 173 किसी भी संख्या से विभाज्य नहीं है, इसलिए यह एक अभाज्य संख्या है।

उदा: x, y और z तीन अलग-अलग अभाज्य संख्याएँ हैं, जहाँ $x < y < z$ है। यदि $x + y + z = 70$ हो, तो z का मान क्या होगा?

हल: यहाँ, योग 70 है, जिसका अर्थ है कि इन संख्याओं में से कम से कम एक संख्या सम (even) है। जैसा कि हम जानते हैं, केवल एक ही सम अभाज्य संख्या होती है, और वह है 2

2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या भी है।

इसका अर्थ है कि $x = 2$

अब, $70 - 2 = 68 = y + z$

विभिन्न अभाज्य संख्याओं के मान रखकर देखने पर हमें परिणाम प्राप्त होता है:

$y = 31$ और $x = 37$

उदा: 53 से 97 के बीच कितनी भाज्य (composite) संख्याएँ हैं?

हल: यदि हम 53 और 97 के बीच की कुल पूर्णांक संख्याएँ ज्ञात करें और फिर उनमें से अभाज्य संख्याओं की संख्या घटा दें, तो हमें भाज्य संख्याओं की संख्या प्राप्त हो जाएगी।

कुल संख्या = $97 - 53 + 1 = 45$ (+1 तब जोड़ा जाता है जब दोनों संख्याओं को शामिल किया जाता है)

53 से 97 के बीच कुल अभाज्य संख्याएँ 10 हैं।

अतः, भाज्य संख्याएँ = 45 - 10 = 35

उदाहरण: निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

(A) सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक होती हैं।

(B) सभी वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय होती हैं।

(C) परिमेय संख्याएँ वास्तविक नहीं होतीं।

(D) पूर्णांक परिमेय नहीं होते।

हल: अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याओं का एक उपसमुच्चय (subset) होती हैं, इसलिए सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक होती हैं।

सभी वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय नहीं होतीं;

परिमेय संख्याएँ भी वास्तविक होती हैं।

परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ ही होती हैं।

पूर्णांक परिमेय संख्याओं का एक उपसमुच्चय होते हैं, क्योंकि किसी भी पूर्णांक को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है (उदाहरण के लिए, $5 = \frac{5}{1}$)

अतः, सही उत्तर (A) है।

Special concept: खास तरह की संख्याओं के अंकों के योग पर आधारित

संख्या	वर्ग	अंको का योग
11^2	121	3
111^2	12321	9
So, on		
111111111^2	12345678987654321	81

उदा: एक 9-अंकों वाली संख्या का हर अंक 1 है। इसे उसी संख्या से गुणा किया जाता है। इससे जो संख्या बनती है, उसके अंकों का योग क्या होगा?

हल: concept का प्रयोग करने पर

$111111111^2 \Rightarrow 81$

Type 2: इकाई अंको पर आधारित प्रश्न

> किसी व्यंजक का इकाई का अंक ज्ञात करने के लिए, पूरे व्यंजक का मान निकालने के बजाय केवल संख्याओं के इकाई के अंकों पर विचार करें।
>
> (a + b)इकाई अंक = a का इकाई अंक + b का इकाई अंक
> (a − b) इकाई अंक = a का इकाई अंक − b का इकाई अंक
> (a × b) इकाई अंक = a का इकाई अंक × b का इकाई अंक

उदा: 435×433 का इकाई अंक ज्ञात कीजिए

हल:

a × b का इकाई अंक = a का इकाई अंक × b का इकाई अंक

5×3=15, इसलिए इकाई अंक 5 है।

चक्रीयता

संख्या प्रणाली में चक्रीयता का अर्थ है अंकों या शेषफलों का वह दोहराया जाने वाला पैटर्न, जो तब बनता है जब किसी संख्या को उच्च घातों तक बढ़ाया जाता है। इकाई का अंक सभी घातों के लिए अपरिवर्तित रहता है।

$0 \rightarrow 0$ $\quad$ $1 \rightarrow 1$

$5 \rightarrow 5$ $\quad$ $6 \rightarrow 6$

2 की चक्रीयता: इकाई का अंक दो मानों के बीच बारी-बारी से बदलता है।

$4 \rightarrow 4, 6$

जब घात विषम होती है, तो इकाई का अंक 4 होता है, और जब घात सम होती है, तो इकाई का अंक 6 होता है।

$9 \rightarrow 9, 1$

जब घात विषम होती है, तो इकाई का अंक 9 होता है, और जब घात सम होती है, तो इकाई का अंक 1 होता है।

4 की चक्रीयता: इकाई का अंक चार घातों के बाद दोहराता है।

$2 \rightarrow 2, 4, 8, 6$ $\quad$ $3 \rightarrow 3, 9, 7, 1$

$7 \rightarrow 7, 9, 3, 1$ $\quad$ $8 \rightarrow 8, 4, 2, 6$

माना, $N = x^y$

(N) का इकाई अंक ज्ञात करने के लिए, हमें केवल आधार संख्या (x) के इकाई अंक पर विचार करने की आवश्यकता होती है। किसी घातीय व्यंजक का इकाई अंक, घात को 4 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात करके निर्धारित किया जा सकता है।

Type 3: चक्रीयता -अंकगणितीय समीकरणों पर आधारित इकाई के अंक पर आधारित प्रश्न

उदा: यदि $x = (164)^{169} + (333)^{337} - (727)^{726}$ x का इकाई अंक ज्ञात कीजिए?

हल: इस व्यंजक में, पहले पद में 4 की घात विषम है, इसलिए पहले पद का इकाई का अंक 4 है। दूसरे पद के लिए, 337 को 4 से भाग देने पर शेषफल 1 आता है, इसलिए दूसरे पद का इकाई का अंक 3 है। तीसरे पद के लिए, 726 को 4 से भाग देने पर शेषफल 2 आता है; अतः, तीसरे पद का इकाई का अंक 9 है।

इसलिए, व्यंजक का इकाई का अंक $4 + 3 - 9 = -2$ है।

यदि इकाई का अंक ऋणात्मक आता है, तो सही इकाई का अंक प्राप्त करने के लिए उसमें 10 जोड़ दें। इकाई का अंक $10 - 2 = 8$ है।

उदा: $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + 20^5$ का इकाई का अंक ज्ञात कीजिए

हल: प्रत्येक पद में, चक्रीयता 1 है। इसलिए, प्रत्येक पद के लिए, इकाई का अंक वही होता है जो स्वयं उस संख्या का होता है।

1 से 10 तक की संख्याओं के लिए इकाई का अंक शून्य होता है।

$$= (1 + 2 + 2..+9 + 0) + (1 + 2 + 3..+9 + 0) = 0$$

उदा: $x = 187^{280} \times 529^{320} \times 343^{236}$ का इकाई का अंक ज्ञात कीजिए

हल: यदि शेषफल 0 आता है, तो घात को 4 के बराबर मान लें।

पहले के पद के लिए $- 7^4$ की चक्रीयता 1

दुसरे पद के लिए –9 की घात सम है, इसलिए इकाई का अंक 1 है।

तीसरे पद के लिए - 3^4 की चक्रीयता 1

इकाई का अंक $= 1 \times 1 \times 1 = 1$

उदा: व्यंजक का इकाई का अंक $(57242)^{9\times7\times5\times3\times1}$?

हल: हम केवल अंक 2 की जाँच करते हैं। घात को 4 से विभाजित किया जाएगा।

$= 2^{1\times(-1)\times1\times(-1)\times1} = 2^1$

अत: इकाई का अंक = 2

Type 4: गिनती पर आधारित प्रश्न (कोई अंक, पृष्ठ या key stokes की गिनती)

1 to 9 → आवश्यक अंक = 9	
10 to 99 → 90×2 = 180	

उदा: 428 पृष्ठों वाली एक पुस्तक की नंबरिंग करने के लिए कितने अंकों की आवश्यकता होगी?

हल : 1 to 9 → आवश्यक अंक = 9

10 to 99 → 90×2 = 180

100 से 428 = (428-100+1) = 329→329×3=987

आवश्यक अंकों की कुल संख्या = 9 +180 + 987 =1176

Type 5: पूर्ण वर्ग पर आधारित प्रश्न

यह कैसे जांचें कि कोई संख्या पूर्ण वर्ग है या नहीं (यह केवल संभावना दर्शाता है)

1. किसी भी पूर्ण वर्ग संख्या के अंतिम दो अंक 1 से 24 तक की संख्याओं के वर्गों में से ही होने चाहिए।
2. इकाई का अंक 2, 3, 7 या 8 नहीं होना चाहिए।
3. संख्या और उसके हर (denominator) में शून्यों की संख्या सम (even) होनी चाहिए।
4. किसी पूर्ण वर्ग संख्या को 9 से भाग देने पर शेषफल 0, 1, 4 या 7 ही आना चाहिए।

उदा: क्या यह संभव है कि 562576 एक पूर्ण वर्ग संख्या हो?

हल: संख्या का अंत 76 से होता है, जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या के लिए संभव है। इकाई का अंक 6 है, इसलिए इस संख्या के पूर्ण वर्ग होने की संभावना है।

562576 के अंकों का योग = 21

9 से भाग देने पर शेषफल 3 आता है।

अतः, यह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है।

Type 6: दशमलव को भिन्न में बदलना

- हर में शून्यों की संख्या, दशमलव बिंदु के बाद आने वाले अंकों की संख्या के बराबर होती है।

$$0.abc = \frac{abc}{1000}$$

- हर में 9 की संख्या, दशमलव बिंदु के बाद आने वाले अंकों की संख्या के बराबर होती है।

$$0.\overline{abc} = \frac{abc}{999}$$

- जब कुछ अंकों पर ओवरलाइन (overline) नहीं होता है

$$0.a\overline{bc} = \frac{abc - a}{990}$$

$$0.ab\overline{cd} = \frac{abcd - ab}{9900}$$

- मिश्रित अवधारणा

$$a.b\overline{cd} = a + \frac{bcd - b}{990} = \frac{abcd - ab}{990}$$

उदा: यदि $A = 0.3\overline{12}$, $B = 0.4\overline{15}$ और $C = 0.30\overline{9}$ तो दिए गये व्यंजक का मान $A + B + C$.

हल:

$$A + B + C = \frac{312 - 3}{990} + \frac{415 - 4}{990} + \frac{309 - 30}{900}$$

$$A + B + C = \frac{720}{999} + \frac{279}{900}$$

$$A + B + C = \frac{10269}{9900} = \frac{1141}{1100}$$

Type 7: शून्यो की संख्या

- किसी संख्या के अंत में आने वाले शून्य, उसके गुणनखंडन में 10 की संख्या से निर्धारित होते हैं; यह मुख्य रूप से 5 और 2 के जोड़ों पर आधारित होता है।
- फैक्टोरियल एक गणितीय संक्रिया है जो गैर-ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए परिभाषित है।
- किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए, n का फैक्टोरियल (जिसे n! से दर्शाया जाता है) 1 से लेकर n तक के सभी धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल होता है।

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$
$$0! = 1, \ 1! = 1$$

  - ✓ 4! के बाद आने वाली संख्याओं का इकाई अंक शून्य होता है।
  - ✓ 4! और उसके बाद आने वाले सभी फैक्टोरियल 4 से विभाज्य होते हैं।
  - ✓ 'n' क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल n से विभाज्य होता है।
- फैक्टोरियल में निहित संख्या की घात: n! में निहित किसी अभाज्य संख्या 'p' की उच्चतम घात निम्न प्रकार दी जाती है:

$$= \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

- n क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सदैव n! से विभाज्य होता है।

उदा: तीन संख्याएँ 24, 25 और 26 किससे विभाज्य हैं?

हल: n क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सदैव n! से विभाज्य होता है।

अर्थात् 24, 25, 26, 3! से विभाज्य हैं।

उदा: 100! में अंत में आने वाले शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: 100! में 2 के गुणनखंड प्रचुर मात्रा में होते हैं, इसलिए हम केवल 5 के गुणनखंडों की गणना करते हैं।

5 का प्रत्येक गुणज, 5 का कम से कम एक गुणनखंड प्रदान करता है। 25, 50, 75, 100 जैसी संख्याओं में 5 का एक अतिरिक्त गुणनखंड होता है, क्योंकि $25 = 5^2$होता है।

$$\left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{25}\right] + \left[\frac{100}{125}\right] = 20 + 4 + 0 = 24$$

अंत में आने वाले शून्यों की संख्या = 24

उदा: 2×4×6…×250 में अंत में आने वाले शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: 2 के गुणनखंड बहुत ज़्यादा हैं, इसलिए हम सिर्फ़ 5 के गुणनखंडों को गिनेंगे।

$$2 \times 4 \times 6 \ldots \times 250 = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \ldots.(2 \times 125)$$

$$(2 \times 1) \times (2 \times 2) \ldots.(2 \times 125) = 2^{125}(1 \times 2 \times \ldots 125)$$

$$2^{125}(1 \times 2 \times \ldots 125) = 2^{125} \times 125!$$

$$\left[\frac{125}{5}\right] + \left[\frac{125}{25}\right] + \left[\frac{125}{125}\right] = 25 + 5 + 1 = 31$$

अंत में आने वाले शून्यों की संख्या = 31

विभाज्यता

संख्या	विभाज्यता का नियम
2	अंतिम अंक 0, 2, 4, 6, 8 हो
3	अंकों का योग 3 से विभाज्य हो
4	अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 4 से विभाज्य हो
5	अंतिम अंक 0 या 5 हो
25	अंतिम दो अंक 00 हों या 25 से विभाज्य हों
6	संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य हो
7	अंतिम अंक का दुगुना शेष संख्या में से घटाएँ; परिणाम 7 से विभाज्य हो
8	अंतिम तीन अंक 8 से विभाज्य हों
9	अंकों का योग 9 से विभाज्य हो
11	सम और विषम स्थानों पर स्थित अंकों के योग का अंतर 0 हो या 11 से विभाज्य हो

Special cases

1. 1001 = 7×11×13

   $1001 \times abc = abcabc$
2. 10101 = 3×7×13×37

   $10101 \times ab = ababab$

Type 8: विभाज्यता के नियमों पर आधारित प्रश्न

उदा: एक संख्या N, 9 को 99 बार लिखकर बनाई जाती है। यदि N को 13 से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: जब कोई संख्या n बार दोहराई जाती है, तो 6-अंकों की संख्या का संयोजन 7, 11 और 13 से विभाज्य होता है।

96 बार लिखा गया 9, 13 से विभाज्य होगा, और केवल तीन 9 शेष बचेंगे।

$$= \frac{999}{13} \Rightarrow R \rightarrow 11$$

उदा: $(a + b)$ का वह सबसे बड़ा संभव मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए 8-अंकों की संख्या 143b203a, 15 से विभाज्य हो।

हल: 3 की विभाज्यता - यदि इसके अंकों का योग 3 से विभाज्य हो।

5 की विभाज्यता - यदि अंतिम अंक 0 या 5 हो, तो पूरी संख्या 5 से विभाज्य होती है।

15 के गुणनखंड = (3 × 5); अतः, संख्या 3 और 5 दोनों से विभाज्य होनी चाहिए।

इसलिए, a का मान 0 या 5 हो सकता है। लेकिन, क्योंकि प्रश्न में सबसे बड़ा मान पूछा गया है, इसलिए a का मान 5 ही होना चाहिए।

इसके बाद, संख्या के अंकों का = 18+b

सबसे बड़े मान के लिए = b=9

अतः, $(a + b) = (9 + 5) = 14$

उदा: यदि 9-अंकों की संख्या 72x8431y4, 36 से विभाज्य है, तो y के सबसे छोटे संभव मान के लिए $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए; जहाँ x और y प्राकृत संख्याएँ हैं।

हल: 36 की विभाज्यता का नियम यह है कि संख्या 4 और 9 दोनों से विभाज्य होनी चाहिए।

अंतिम दो अंकों की संख्या = y4; y = 2 रखने पर, अंतिम दो अंकों की संख्या 24 हो जाती है।

इसलिए, y का मान = 2 है। (y सबसे छोटा संभव मान है)

9 से विभाज्यता के नियम के अनुसार,

संख्या का योग = $31 + x$

अतः, $x = 5$

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{5}{2}-\frac{2}{5}\right) = 2\frac{1}{10}$$

Type 9: व्यंजकों की विभाज्यता

व्यंजक	'n' विषम हो	'n' सम हो
$x^n - y^n$	$(x-y)$	$(x+y)(x-y)$
$x^n + y^n$	$(x+y)$	Can't say

उदा:यदि $(17^{26} - 11^{26})$ is को 42 से भाग दिया जाये तो शेषफल क्या होगा?

हल : n सम है .अतः, $(x+y)(x-y)$

$$=\frac{(17+11)(17-11)}{42} = \frac{28\times 6}{42},$$

शेषफल $= 0$

Key Point: यदि 'n' विषम है और $a, b, c \dots z$ क्रमागत प्राकृत संख्याएँहै तो $(a^n + b^n + \cdots + z^n)$, $(a + b + c \dots z)$ से विभाज्य होगा

उदा: $11^5 + 12^5 + 13^5$ किससे विभाज्य है ?

हल: 11+12+13 = 36

इसलिए, यह व्यंजक 36 से विभाज्य है।

Type 10: अंक और उसका विपरीत रूप (2-अंकीय और 3-अंकीय)

1. 2 अंकों वाली संख्या के लिए:

माना , मूल दो अंको वाली संख्या $= 10x + y$,

विपरीत संख्या $= 10y + x$

दोनों संख्याओ का योग

$(10x + y) + (10y + x) = 11(x + y)$

दोनों संख्याओ का अंतर

$(10x + y) - (10y + x) = 9(x - y)$

2. 3-अंकों वाली संख्या के लिए:

मान, सैकड़े का अंक = x, दहाई का अंक = y,

इकाई का अंक = z

मूल संख्या $= 100x + 10y + z$

सैकड़े और इकाई के अंकों को आपस में बदलने पर,

नई संख्या = $100z + 10y + x$

दोनों संख्याओ का अंतर $= 99(x - z)$

उदा: दो-अंकों वाली किसी संख्या और उसके अंकों को आपस में बदलने पर प्राप्त संख्या का योग 99 है। यदि अंकों का अंतर 1 है, तो वह संख्या क्या है?

हल: माना ,संख्या $= 10x + y$

$(10x + y) + (10y + x) = 99$

$x + y = 9$

$x - y = 1$

समीकरण हल करने पर $x = 5, y = 4$

अतः, संख्या है= $10 \times 5 + 4 = 54$

उदा: संख्या 23x45678 को 22 से विभाज्य बनाने के लिए रिक्त स्थान में भरी जाने वाली सबसे छोटी प्राकृत संख्या क्या होगी?

हल: 22 के लिए विभाज्यता का नियम 2 और 11 दोनों से विभाज्यता पर आधारित है। कोई संख्या 11 से तब विभाज्य होती है, जब उसके विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य हो।

विषम स्थानों का योग: $3 + 4 + 6 + 8 = 21$

सम स्थानों का योग: $2 + x + 5 + 7 = 14 + x$

$21 - (14 + x) = 7 - x$

$7 - x = 11k$, जहाँ k कोई पूर्णांक है

x के सबसे छोटे मान के लिए, मान लीजिए$k = 0$

$7 - x = 0 \Rightarrow x = 7$

अतः, x का वह सबसे छोटा मान जो संख्या 23x45678 को 22 से विभाज्य बनाता है, 5 है।

उदा: 700 से 950 तक (दोनों को मिलाकर) ऐसी कितनी संख्याएँ हैं, जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं?

हल:

न तो 3 से विभाज्य और न ही 7 से

= कुल संख्याएँ − (3 या 7 से विभाज्य संख्याएँ)

= कुल − $[N(3) + N(7) - N(21)]$

कुल संख्याएँ 700 से 950 = 251

3 से विभाज्य $= \frac{251}{3} \approx 83$

7 से विभाज्य $= \frac{251}{7} \approx 35$

21से विभाज्य $= \frac{251}{21} \approx 11$

अभीष्ट सख्या

$= 251 - (83 + 35 - 11) = 144$

गुणनखंडन

किसी संख्या का गुणनखंड (factor) एक पूर्ण संख्या होती है, जिसे किसी दूसरी पूर्ण संख्या से गुणा करने पर मूल संख्या प्राप्त होती है। दूसरे शब्दों में, एक गुणनखंड उस संख्या को पूरी तरह से विभाजित कर देता है और कोई शेषफल नहीं बचता।

माना $N = a^p \times b^q \times c^r$

- गुणनखंडों की कुल संख्या= $(p+1)(q+1)(r+1)$
- सम गुणनखंडों की कुल संख्या = $p(q+1)(r+1)$
- विषम गुणनखंडों की कुल संख्या= $(q+1)(r+1)$
- सभी गुणनखंडों का योग $= (a^0 + a^1 + \cdots a^p)(b^0 + b^1 + \cdots b^q)(c^0 + c^1 + \cdots + c^q)$
- सम गुणनखंडों का योग= $(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^p)(b^0 + b^1 + \cdots + b^q)(c^0 + c^1 + \cdots + c^r)$
- विषम गुणनखंडों का योग $= 2^0(b^1 + b^2 + \cdots + b^q)(c^1 + c^2 + \cdots + c^r)$
- गुणनखंडों का औसत= $\frac{\text{गुणनखंडों का योग}}{\text{गुणनखंडों की संख्या}}$
- गुणनखंडों के व्युत्क्रमों का योग $= \frac{\text{गुणनखंडों का योग}}{\text{दी गई संख्या}}$
- अभाज्य गुणनखंडों की संख्या $= p + q + r$
- विशिष्ट अभाज्य गुणनखंडों की संख्या = गुणनखंडों में मौजूद अभाज्य संख्याओं की संख्या
- भाज्य संख्याओं की संख्या = कुल − विशिष्ट अभाज्य संख्याएँ − 1
- प्रत्येक संख्या के धनात्मक और ऋणात्मक गुणनखंड होते हैं
- (अभाज्य संख्या)^2 के रूप वाली सभी संख्याओं के 3 गुणनखंड होते हैं।

Type 11: गुणनखंडों की संख्या ज्ञात करना

उदा: N = 3600 के लिए सभी प्रकार के गुणनखंड और सभी प्रकार के गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: $N = 3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$

- कुल गुणनखंडों की संख्या= $5 \times 3 \times 3 = 45$
- सम गुणनखंडों की संख्या

  $2 \times (1800) = 2(2^3 \times 3^2 \times 5^2)$
  $= 4 \times 3 \times 3 = 36$
- विषम गुणनखंडों की संख्या $= 3 \times 3 = 9$
- अभाज्य गुणनखंडों की संख्या $= 4 + 2 + 2 = 8$
- विशिष्ट अभाज्य गुणनखंडों की संख्या (जो गुणनखंडन में दिखाई देते हैं)= $1 + 1 + 1 = 3$
- भाज्य संख्याओं की संख्या $= 45 - 3 - 1 = 41$
- पूर्ण वर्ग= $(2^2)^2(3^2)^1(5^2)^1$

  $= 3 \times 2 \times 2 = 12$
- पूर्ण घन = $(2^3)^1 = (1 + 1) = 2$
- सभी गुणनखंडों का योग= $(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 12493$
- सम गुणनखंडों का योग $= (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 12090$
- विषम गुणनखंडों का योग= $(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 403$
- अभाज्य गुणनखंडों का योग $= 2 + 3 + 5 = 10$
- भाज्य संख्याओं का योग =

  कुल योग − (अभाज्य गुणनखंडों का योग + 1)
  $= 12493 - 10 - 1 = 12482$
- पूर्ण वर्गों का योग $= (2^0 + 2^2 + 2^4)(3^0 + 3^2)(5^0 + 5^1) = 5460$

उदा: $(4^{11} \times 5^5 \times 3^2 \times 13^2)$ व्यंजक में कुल अभाज्य गुणनखंड की संख्या ज्ञात कीजिए

हल :

$(4^{11} \times 5^5 \times 3^2 \times 13^2) = 2^{22} \times 3^2 \times 5^5 \times 13^2$

अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या

$= 22 + 2 + 5 + 2 = 31$

उदा: $(30^{16} \times 16^{18} \times 20^{21})$ के कितने गुणनखंड ऐसे जो पूर्ण वर्ग होने के साथ साथ पूर्ण घन भी है

हल: $30^{16} \times 16^{18} \times 20^{21} = 2^{130} \times 3^{16} \times 5^{37}$

जब पूर्ण वर्ग या पूर्ण घन की जाँच करने के लिए कहा जाए, तो देखें कि क्या घात (power) 6 का गुणज है।

$$2^{130} \times 3^{16} \times 5^{37} = 2^{126} \times 2^4 \times 3^{12} \times 3^4 \times 5^{36} \times 5^1$$

$$2^{126} \times 2^4 \times 3^{12} \times 3^4 \times 5^{36} \times 5^1 = (2^6)^{21} \times 2^4 \times (3^6)^2 \times 3^4 \times (5^6)^6 \times 5^1$$

उन गुणनखंडों की कुल संख्या जो पूर्ण वर्ग और पूर्ण घन दोनों हैं $= (21+1)(2+1)(6+1) = 462$

उदा: संख्या $2^8 \times 3^6 \times 5^4 \times 10^5$ के कितने गुणनखंड 120 के गुणज है

हल: $N = 2^8 \times 3^6 \times 5^4 \times 10^5 = 2^{13} \times 3^6 \times 5^9$

$$\frac{N}{120} = \frac{2^{13} \times 3^6 \times 5^9}{2^3 \times 3^1 \times 5^1} = 2^{10} \times 3^5 \times 5^8$$

गुणनखंडो की संख्या $= 11 \times 6 \times 9 = 594$

शेषफल

मान कोई संख्या N है, जिसे भाजक D से भाग देने पर शेषफल R और भागफल Q आता है।

$N = D \times Q + R$

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

यदि किसी संख्या a को n से भाग देने पर शेषफल r आता है, तो ka को n से भाग देने पर शेषफल kr आएगा।

यदि संख्याओं a और b को n से भाग देने पर क्रमशः शेषफल r_1 और r_1 आते हैं, तो

$a + b$ को n, से भाग देने पर शेषफल $r_1 + r_2$

$a \times b$ को n, से भाग देने पर शेषफल $r_1 + r_2$

Type 12: शेषफल प्रमेय पर आधारित प्रश्न

उदा: किसी संख्या को 52 से भाग देने पर शेषफल 45 आता है। यदि उसी संख्या को 13 से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: चूंकि 13, 52 का एक गुणज (multiple) है, इसलिए हम सीधे ही पहले वाले शेषफल को नए भाजक से भाग दे सकते हैं।

$$= \frac{45}{13} \Rightarrow R \rightarrow 6$$

उदा: किसी संख्या को 12 से भाग देने पर शेषफल 5 आता है। यदि उस संख्या के वर्ग को 8 से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: जब किसी संख्या पर कोई गणितीय संक्रिया (operation) की जाती है, तो वही संक्रिया उसके शेषफल पर भी की जा सकती है।

$$= \frac{5^2}{8} = \frac{25}{8} \Rightarrow R \rightarrow 1$$

उदा: यदि भाज्य 45 है, भाजक 8 है, और भागफल 5 है, तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल: $N = D \times Q + R$

$45 = 8 \times 5 +$ शेषफल

शेषफल $= 45 - 40 = 5$

Type 13: शेषफल की महत्वपूर्ण अवधारणा

$$\frac{(x+a)^n}{x} \Rightarrow R \rightarrow a^n$$

$$\frac{(x+1)^n}{x} \Rightarrow R \rightarrow 1$$

$$\frac{(x-1)^n}{x} \Rightarrow R \rightarrow (1)^n$$

$R = 1$ जब $n -$ सम हो

$R = -1$ जब $n -$ विषम हो

Special case:

$$\frac{4}{6} \Rightarrow R \rightarrow 4$$

$$\frac{4^n}{6} \Rightarrow R \rightarrow 4$$

उदा: जब 2^{75} को 14 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

हल: $\frac{2^{75}}{15} = \frac{(2^4)^{18}.2^3}{15} = \frac{(16-1)^{18} \times 8}{15} \Rightarrow R \rightarrow 8$

उदा: यदि 2^{192} को 6 से विभाजित किया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: अवधारणा का उपयोग करने पर

$$\frac{2^{192}}{6} = \frac{4^{96}}{6} \Rightarrow R \rightarrow 4$$

उदा: जब 37^{47} को 19 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

हल:

$$\frac{37^{47}}{19} = \frac{(38-1)^{47}}{19} \Rightarrow R \to -1$$

शेषफल ऋणात्मक नहीं हो सकता, इसलिए शेषफल को भाजक में से घटाया जाता है।

$R \to -1 \Rightarrow R \to 19 - 1 = 18$

Type 14: फर्मेट लिटिल प्रमेय

यदि $\frac{a^{P-1}}{P}$, $\Rightarrow R \to 1$

Conditions

1. P-अभाज्य संख्या है
2. a, P -सह-अभाज्य संख्या है

उदा: जब 21^{47} को 47 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

हल: 21 और 47 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं, इसलिए हम Fermat's little theorem का उपयोग कर सकते हैं।

$$\frac{21^{47}}{47} = \frac{21^{46} \times 21}{47} \Rightarrow R \to 21$$

Type 15: युलर (टोसेंत) प्रमेय [Euler's (totient) theorem]

$\frac{A^X}{d} \Rightarrow R \to 1$

जहां A और d – सह-अभाज्य

X – d से छोटी और d के सह-अभाज्य संख्याओं की संख्या।

$$X = d\left(1 - \frac{1}{P^1}\right)\left(1 - \frac{1}{P^2}\right) \ldots \ldots \ldots$$

जहाँ P^1 और P^2, d के भिन्न अभाज्य गुणनखंड हैं।

उदा: यदि φ Euler's totient फलन , तो φ(92) =?.

हल : $92 = 2^2 \times 23$

$$\varphi(92) = 92\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{23}\right) = 44$$

उदा: 7^{82} को 11 से विभाजित किया जाये तो , R=?

हल: 7^{82} को 11 से भाग देने पर शेष राशि ज्ञात करने के लिए, हम फ़र्मेट प्रमेय का उपयोग कर सकते हैं, जो बताता है कि यदि p एक अभाज्य संख्या है और a एक पूर्णांक है जो p से विभाज्य नहीं है, तो

$$\varphi(11) = 11\left(1 - \frac{1}{11}\right) = 10$$

82 को 10 से विभाजित किया जाता है, और शेषफल है

$\frac{7^2}{11} \Rightarrow R \to 5$

Type 16: विलसन प्रमेय

यदि P अभाज्य संख्या हो तो

$\frac{(P-1)!}{P} \Rightarrow R \to P - 1$

$\frac{(P-2)!}{P} \Rightarrow R \to 1$

उदा: जब 568! को 569 से विभाजित किया जाएगा, तो शेषफल क्या होगा?

हल:

$$\frac{568!}{596} = \frac{(569-1)!}{P} \Rightarrow R \to 569 - 1 = 568$$

18
CHAPTER

भौतिक शास्त्र

भौतिक मात्राएँ (Physical Quantities)

भौतिक मात्राएँ वे मात्राएँ होती हैं जिन्हें परिभाषित और मापित किया जा सकता है। एक भौतिक मात्रा का एक संख्यात्मक परिमाण (magnitude) और इकाई (unit) होती है।

उदाहरण: लंबाई, बल, तापमान आदि।

1. **मूल भौतिक मात्राएँ (Fundamental Quantities) :** यह वे भौतिक मात्राएँ होती हैं जो आपस में स्वतंत्र होती हैं और जिन्हें अन्य भौतिक मात्राओं के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता।
   मूल भौतिक मात्राएँ: द्रव्यमान (Mass), लंबाई (Length), समय (Time), तापमान (Temperature), धारा (Current), पदार्थ की मात्रा (Amount of Substance), दीप्तिमान (Luminous Intensity)
2. **व्युत्पन्न भौतिक मात्राएँ (Derived Quantities :** यह वे भौतिक मात्राएँ होती हैं जो मूल भौतिक मात्राओं से व्युत्पन्न होती हैं।
   उदाहरण: गति (Velocity), बल (Force), ऊर्जा (Energy) आदि।
3. **स्केलर और वेक्टर मात्राएँ**

- **स्केलर मात्राएँ (Scalar Quantities)**: वे मात्राएँ जिनमें केवल परिमाण होता है, दिशा नहीं होती।
  उदाहरण: दूरी, ऊर्जा, शक्ति आदि।
- **वेक्टर मात्राएँ (Vector Quantities)**: वे मात्राएँ जिनमें परिमाण के साथ दिशा भी होती है।
- **उदाहरण**: विस्थापन (Displacement), वेग (Velocity), बल (Force) आदि।

इकाइयाँ (Units): इकाइयाँ वह मानकीकृत मात्राएँ हैं जिन्हें भौतिक मात्राओं को व्यक्त करने के लिए उपयोग किया जाता है।

SI इकाइयाँ (SI Units) : SI (System International) इकाइयाँ, जो 1960 में स्थापित की गई थीं, भौतिक मात्राओं के माप के लिए एक अंतरराष्ट्रीय मानक प्रणाली है

भौतिक मात्रा	नाम (चिह्न)	आयाम	व्यावहारिक इकाई
लंबाई (Length)	मीटर (m)	[L]	• **1 फर्मी (Fermi)** = 10^{-15} मीटर • **1 एंगस्ट्रॉम (Å)** = 10^{-10} मीटर • **1 नैनोमीटर (nm)** = 10^{-9} मीटर • **1 माइक्रोमीटर (μm)** = 10^{-6} मीटर • **1 मिलीमीटर (mm)** = 10^{-3} मीटर **1 इंच (inch)** = 2.54 सेंटीमीटर (cm) • **1 सेंटीमीटर (cm)** = 10^{-2} मीटर • **1 फुट (foot)** = 0.3048 मीटर • **1 किलोमीटर (km)** = 10^{3} मीटर **1 मील (Mile)** = 1.6 किलोमीटर (km) • **1 समुद्री मील (Nautical Mile)** = 1.852 किलोमीटर = 1852 मीटर • **1 खगोलीय इकाई (Astronomical Unit - 1 AU)** = 1.5×10^{11} मीटर • **1 प्रकाश वर्ष (Light year)** = 9.46×10^{15} मीटर या 10^{16} मीटर • **1 पारसेक (Parsec)** = 3.26 प्रकाश वर्ष = 3.083×10^{16} मीटर
द्रव्यमान (Mass)	किलोग्राम (kg)	[M]	• **1 माइक्रोग्राम (μg)** = 10^{-9} किलोग्राम • **1 मिलीग्राम (mg)** = 10^{-6} किलोग्राम • **1 ग्राम (g)** = 10^{-3} किलोग्राम • **1 क्विंटल (Quintal)** = 10^{2} किलोग्राम • **1 मीट्रिक टन (Metric tons)** = 10^{3} किलोग्राम • **1 परमाणु द्रव्यमान इकाई (Atomic mass unit)** = 1.66×10^{-27} किलोग्राम • **1 पाउंड (Pound)** = 16 औंस = 0.4537 किलोग्राम • **1 चंद्रशेखर सीमा (Chandrasekhar limit)** = 1.4 × सूर्य के द्रव्यमान के बराबर = 2.8×10^{30} किलोग्राम • **1 स्लग (Slug)** = 14.59 किलोग्राम

समय (Time)	सेकंड (s)	[T]	• **1 पिकोसेकंड (Picosecond, ps)** = 10^{-12} सेकंड • **1 नैनोसेकंड (Nanosecond, ns)** = 10^{-9} सेकंड • **1 माइक्रोसेकंड (Microsecond, μs)** = 10^{-6} सेकंड • **1 मिलीसेकंड (Millisecond, ms)** = 10^{-3} सेकंड • **1 मिनट (Minute)** = 60 सेकंड **1 घंटा (Hour)** = 60 मिनट = 3600 सेकंड • **1 दिन (Day)** = 24 घंटे = 1440 मिनट = 86400 सेकंड = 1 सौर दिन • **1 सप्ताह (Week)** = 7 दिन • **1 चंद्र मास (Lunar month)** = 28 दिन = 4 सप्ताह • **1 सौर मास (Solar month)** = 30 या 31 दिन (फरवरी में 28 या 29 दिन) • **1 वर्ष (Year)** = 365 1/4 दिन • **1 चंद्रमास (Moon month)** = 27.3 सौर दिन • **1 लीप वर्ष (Leap year)** = 366 दिन (लीप वर्ष में फरवरी में 29 दिन होते हैं) • **1 शेक (Shake)** = 10^{-8} सेकंड
विद्युत धारा (Current)	एम्पीयर (A)	[I]	
तापमान (Temperature)	केल्विन (K)	[Θ]	
पदार्थ की मात्रा (Substance Amount)	मोल (mol)	[N]	
दीप्तिमानता (Luminous Intensity)	कैंडेला (cd)	[J]	

पूरक इकाइयाँ (Supplementary Units) : ये विशिष्ट उद्देश्यों के लिए उपयोग की जाती हैं, लेकिन ये सात बुनियादी इकाइयों का हिस्सा नहीं होती हैं।

- **समतल कोण (Plane Angle)**: रेडियन (rad)
- **ठोस कोण (Solid Angle)**: स्टीराडियन (Sr)

व्युत्पन्न इकाइयाँ (Derived Units) : यह वे इकाइयाँ होती हैं जो बुनियादी इकाइयों के संयोजन से प्राप्त होती हैं।माप की त्रुटियाँ (Errors in Measurement)

व्युत्पन्न मात्रा	**व्युत्पत्ति / सूत्र**	**इकाई**	**आयाम**
क्षेत्रफल (Area)	लंबाई x चौड़ाई	मी^{2}	$[M^0L^2T^0]$
आयतन (Volume)	लंबाई x चौड़ाई x ऊँचाई	मी^{3}	$[M^0L^3T^0]$
गति (Speed/Velocity)	विस्थापन / समय	मीटर/सेकंड (m/s)	$[M^0L\,T^{-1}]$
बल (Force)	द्रव्यमान x त्वरण	न्यूटन (N)	$[MLT^{-2}]$
कार्य (Work)	बल x दूरी	जूल (J)	$[ML^2T^{-2}]$
ऊर्जा (Energy)	कार्य	जूल (J)	$[ML^2T^{-2}]$
विद्युत आवेश (Electric Charge)	विद्युत धारा x समय	कुलॉम्ब (C)	[IT]

प्रमुख उपकरण एवं उनके उपयोग

उपकरण	**उपयोग**
ऐक्सेलेरोमीटर (Accelerometer)	त्वरण (acceleration) मापने के लिए।
मैग्नेटोग्राफ (Magnetograph)	चुंबकीय क्षेत्र (magnetic field) मापने के लिए।
आल्टीमीटर (Altimeter)	विमान की ऊँचाई (altitude) मापने के लिए।
मनोमीटर (Manometer)	गैस के दबाव (pressure) मापने के लिए।
एम्मीटर (Ammeter)	विद्युत धारा (electric current) मापने के लिए।
मोटोमीटर (Motometer)	वाहन का तापमान (vehicle temperature) मापने के लिए।
एनेमामीटर (Anemometer)	हवा की गति (wind speed) मापने के लिए।

ओहममीटर (Ohmmeter)	विद्युत प्रतिरोध (electric resistance) मापने के लिए।
बारोमीटर (Barometer)	वायुदाब (atmospheric pressure) मापने के लिए।
ओडोमीटर (Odometer)	पहिएदार वाहन द्वारा यात्रा की गई दूरी (distance travelled) मापने के लिए।
बोलोमीटर (Bolometer)	विकिरण ऊर्जा (radiant energy) मापने के लिए।
प्लानिमेटर (Planimeter)	द्वि-आयामी आकार (2D shape) का क्षेत्रफल (area) मापने के लिए (गणित और सर्वेक्षण में)।
कैलिपर (Caliper)	दूरी (distance) मापने के लिए।
फोटामीटर (Photometer)	प्रकाश की तीव्रता (intensity of light) मापने के लिए।
कैलोरीमीटर (Calorimeter)	रासायनिक प्रतिक्रिया में उत्पन्न ताप (heat) मापने के लिए।
पोलारीमीटर (Polarimeter)	समतल-पोलराइज्ड प्रकाश के घूर्णन (rotation) को मापने के लिए (रसायन और ऑप्टिक्स में)।
क्रायोस्कोपी (Cryoscopy)	विलयन के ठंडे बिंदु के गिरने से घुलित पदार्थ की सांद्रता (molar mass) मापने के लिए।
क्रेस्कोग्राफ (Crescograph)	पौधों की वृद्धि (growth) मापने के लिए।
पोलिग्राफ (Polygraph)	झूठी जाँच मशीन (lie detector machine) के रूप में।
सायक्लोट्रॉन (Cyclotron)	सकारात्मक रूप से आवेशित कणों (charged particles) को त्वरित (accelerate) करने के लिए।
पायरोमीटर (Pyrometer)	किसी सतह का तापमान (surface temperature) मापने के लिए।
रडार (Radar)	दूरी (distance) का पता लगाने के लिए (जैसे विमान, आदि)।
रेडियोमीटर (Radiometer)	विकिरण की तीव्रता (intensity or force of radiation) मापने के लिए।
डॉपलर वेदर रडार (Doppler Weather Radar)	वातावरण में वर्षा का पता लगाने के लिए।
रेन गेज (Rain Gauge)	किसी विशेष स्थान पर वर्षा की मात्रा (rainfall) मापने के लिए।
डायनामीटर (Dynamometer)	टॉर्क (torque) मापने के लिए।
सेक्सटैंट (Sextant)	दो दृश्यमान वस्तुओं के बीच कोण (angle) मापने के लिए।
इलेक्ट्रोमीटर (Electrometer)	विद्युत आवेश (electric charge) मापने के लिए।

सिस्मोग्राफ (Seismograph)	पृथ्वी की हलचल (earthquake/seismic waves) मापने के लिए।
इलेक्ट्रोस्कोप (Electroscope)	विद्युत आवेश की उपस्थिति (presence of electric charge) की पुष्टि करने के लिए।
स्पेक्ट्रोमीटर (Spectrometer)	प्रकाश की स्पेक्ट्रा (light spectra) मापने के लिए।
एलिप्सोमीटर (Ellipsometer)	ऑप्टिकल अपवर्तक सूचकांक (optical refractive indices) मापने के लिए।
स्टेरियोस्कोप (Stereoscope)	द्वि-आयामी चित्र (2D photograph) को स्केच करने के लिए।
फैथोमीटर (Fathometer)	समुद्र की गहराई (depth) मापने के लिए।
थियोडोलाइट (Theodolite)	क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर कोण (horizontal and vertical angles) मापने के लिए।
ग्रैविमेटर (Gravimeter)	पृथ्वी के स्थानीय गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र (local gravitational field) मापने के लिए।
थर्मोपाइल (Thermopile)	विकिरणीय गर्मी (radiant heat) की छोटी मात्राएँ मापने के लिए।
गैल्वेनोमीटर (Galvanometer)	विद्युत धारा (electric current) मापने के लिए।
थर्मामीटर (Thermometer)	तापमान (temperature) मापने के लिए।
हाइड्रोमीटर (Hydrometer)	द्रव की विशिष्ट गुरुत्व (specific gravity of liquid) मापने के लिए।
टोमामीटर (Tonometer)	आंख के आंतरिक दबाव (internal pressure of the eye) मापने के लिए।
हाइड्रोफोन (Hydrophone)	पानी के नीचे ध्वनि तरंगों (sound waves underwater) की माप के लिए।
यूडोमीटर (Udometer)	वर्षा की मात्रा (amount of rainfall) मापने के लिए।
हाइग्रोमीटर (Hygrometer)	वायुमंडलीय आर्द्रता (atmospheric humidity) मापने के लिए।
विस्कोमीटर (Viscometer)	द्रव की विस्कोसिटी (viscosity of fluid) मापने के लिए।
इन्क्लिनोमीटर (Inclinometer)	ढलान का कोण (angle of slope) मापने के लिए।
वोल्टमीटर (Voltmeter)	विद्युत विभव (voltage) मापने के लिए।

इंटरफेरोमीटर (Interferometer)	इन्फ्रारेड प्रकाश के स्पेक्ट्रा (infrared light spectra) मापने के लिए।
वेंटुरी मीटर (Venturi Meter)	तरल के प्रवाह (flow of liquid) मापने के लिए।
लैक्टोमीटर (Lactometer)	दूध की शुद्धता (purity of milk) मापने के लिए।

आविष्कार और उनके आविष्कारक

आविष्कार / खोज	**आविष्कारक का नाम**	**वर्ष**
गति के नियम (Laws of Motion)	आइज़ैक न्यूटन (Isaac Newton)	1687
विद्युत बल्ब (Light Bulb)	थॉमस एडिसन (Thomas Edison)	1854
क्वांटम सिद्धांत (Quantum Theory)	मैक्स प्लांक (Max Planck)	1900
सूक्ष्मदर्शी (Microscope)	ज़करियास जांसन (Zacharias Janssen)	1590
विद्युत प्रेरण (Electromagnetic Induction)	माइकल फैरेडे (Michael Faraday)	1831
माइक्रोफोन (Microphone)	अलेक्जेंडर ग्राहम बेल (Alexander Graham Bell)	1876
स्वचालित कैलकुलेटर (Automatic Calculator)	विल्हेम शिकार्ड (Wilhelm Schickard)	1623
नीयन बल्ब (Neon Lamp)	जॉर्ज क्लॉड (Georges Claude)	1915
एयर कंडीशनर (Air Conditioner)	विलिस कैरियर (Willis Carrier)	1902
पेसमेकर (Pacemaker)	रून्ने एल्मक्विस्ट (Rune Elmqvist)	1952
एनेमामीटर (Anemometer)	लियोन बैटीस्ता अल्बर्टी (Leon Battista Alberti)	1450
रेफ्रिजरेटर (Refrigerator)	विलियम कलन (William Cullen)	1748
परमाणु बम (Atom Bomb)	जूलियस रॉबर्ट ओप्पेनहाइमर (Julius Robert Oppenheimer)	1945
रेडियम (Radium)	मैरी और पियरे क्यूरी (Marie & Pierre Curie)	1898
हवाई जहाज (Airplane)	विल्बर और ऑरविल राइट (Wilbur and Orville Wright)	1903
रॉकेट इंजन (Rocket Engine)	रॉबर्ट एच. गॉडार्ड (Robert H. Goddard)	1926
द्विदृष्टि लेंस (Bifocal Lens)	बेंजामिन फ्रैंकलिन (Benjamin Franklin)	1779
रेडियो (Radio)	गुग्लिएल्मो मरकोनी (Guglielmo Marconi)	1894
बैरोमीटर (Barometer)	एवांजेलिस्टा टोरिकेली (Evangelista Torricelli)	1643
रिच्टर पैमाना (Richter Scale)	चार्ल्स रिच्टर (Charles Richter)	1935
बॉल प्वाइंट पेन (Ballpoint Pen)	जॉन लाउड (John Loud)	—
शिप (Turbine Ship)	चार्ल्स पार्सन्स (Charles Parsons)	1894
डीजल इंजन (Diesel Engine)	रुदोल्फ डीजल (Rudolf Diesel)	1892
स्टीम शिप (Steam Ship)	रॉबर्ट फुल्टन (Robert Fulton)	1807
सेंटीग्रेड पैमाना (Centigrade Scale)	एंडर्स सेल्सियस (Anders Celsius)	1742
स्टीम बोट (Steam Boat)	रॉबर्ट फुल्टन (Robert Fulton)	1786
डाइनामाइट (Dynamite)	अल्फ्रेड बी. नोबेल (Alfred B. Nobel)	1867
पनडुब्बी (Submarine)	कोर्नेलिस ड्रेबबेल (Cornelis Drebbel)	1620
स्टेथोस्कोप (Stethoscope)	रेने लैनेक (Rene Laennec)	1816
इलेक्ट्रोस्कोप (Electroscope)	विलियम गिल्बर्ट (William Gilbert)	1600
सैक्सोफोन (Saxophone)	अडोल्फ सैक्स (Adolphe Sax)	1846
इलेक्ट्रिक बैटरी (Electric Battery)	अल्बर्ट वोल्टा (Alessandro Volta)	1800
सिलाई मशीन (Sewing Machine)	एलियास हाउ (Elias Howe)	1846
इलेक्ट्रिक मोटर (DC)	थॉमस डेवेंपोर्ट (Thomas Davenport)	1873
थर्मामीटर (Thermometer)	गैलीलियो (Galileo)	1593
इलेक्ट्रोमैग्नेट (Electromagnet)	विलियम स्टर्जन (William Sturgeon)	1824
टाइपराइटर (Typewriter)	क्रिस्टोफर लैथम शोल्स (Christopher Latham Sholes)	—

फाउंटेन पेन (Fountain Pen)	पेट्राच पोएनारू (Petrache Poenaru)	1827
ट्रांजिस्टर (Transistor)	जॉन बार्डीन, विलियम शॉक्ली और वॉल्टर ब्रैटेन (John Bardeen, William Shockley & Walter Brattain)	1948
ग्रामोफोन (Gramophone)	थॉमस एडिसन (Thomas Edison)	1878
टेलीफोन (Telephone)	अलेक्जेंडर ग्राहम बेल (Alexander Graham Bell)	1874
हेलिकॉप्टर (Helicopter)	इगोर सिकोर्स्की (Igor Sikorsky)	1939
वाल्व रेडियो (Valve Radio)	सर जॉन ए. फ्लेमिंग (Sir J.A. Fleming)	1904
हॉट एयर बैलून (Hot Air Balloon)	जोसेफ और एटियेन मोंटगोल्फियर (Josef & Etienne Montgolfier)	1783
एक्स-रे (X-ray)	विल्हेम कॉनराड रोएंटगन (Wilhelm Conrad Rontgen)	1895
जेट इंजन (Jet Engine)	हांस वॉन ओहाइन (Hans Von Ohain)	1936
ज़ेरॉक्स मशीन (Xerox Machine)	चेस्टर कार्लसन (Chester Carlson)	1928
लेजर (Laser)	थियोडोर माइमैन (Theodore Maiman)	1960

गति (Motion)

गति वह स्थिति है जब कोई वस्तु समय के साथ अपने स्थान में परिवर्तन करती है। गति को भौतिकी में दो प्रमुख श्रेणियों में बाँटा जाता है:

1. **सीधी रेखीय गति (Linear Motion)**: यह वह गति है जब कोई वस्तु एक निश्चित दिशा में सीधी रेखा में चलती है।
   उदाहरण: कार का सड़क पर चलना।
2. **परिवर्तित गति (Rotational Motion)**: जब कोई वस्तु एक बिंदु या धुरी के चारों ओर घूर्णन करती है, तो उसे परिवर्तित गति कहा जाता है।
   उदाहरण: पृथ्वी का अपनी धुरी पर घूमना।
3. **आवधिक गति (Oscillatory Motion)**: यह वह गति है जब कोई वस्तु एक निश्चित बिंदु के चारों ओर झूलती है।
   उदाहरण: झूला झूलना।
4. **प्रक्षेप्य गति (Projectile Motion)**: यह गति तब होती है जब कोई वस्तु गुरुत्वाकर्षण और अपनी जड़ता के कारण एक वक्र पथ में यात्रा करती है।
   उदाहरण: गेंद को किसी दिशा में फेंकना।

- **दूरी (Distance) :** दूरी वह वास्तविक लंबाई है जिसे कोई वस्तु एक निश्चित समय में तय करती है। यह एक **स्केलर मात्रा** (जिसमें दिशा का कोई महत्व नहीं होता) है।
  - **इकाई**: मीटर (m)
- **विस्थापन (Displacement) :** विस्थापन वह सबसे छोटी दूरी है जो किसी वस्तु ने अपनी प्रारंभिक स्थिति से अपनी अंतिम स्थिति तक तय की है। यह **वेक्टर राशि** होती है, जिसका दिशा और परिमाण दोनों होते हैं।
  - **इकाई**: मीटर (m)
- **वेग (Velocity) :** वेग विस्थापन को समय के द्वारा विभाजित करके प्राप्त किया जाता है। यह एक **वेक्टर राशि** है, जिसका परिमाण (स्पीड) और दिशा दोनों होते हैं।
  v = Displacement / Time
  - **इकाई**: मीटर प्रति सेकंड (m/s)
- **गति (Speed) :** गति वह माप है जो किसी वस्तु की दूरी को तय करने की दर को दिखाता है। यह एक **स्केलर मात्रा** है, जिसमें केवल परिमाण होता है और दिशा का कोई महत्व नहीं होता।

  Speed = Distance / Time

  इकाई: मीटर प्रति सेकंड (m/s)
- **त्वरण (Acceleration) :** त्वरण वह दर है, जिस पर किसी वस्तु की गति में परिवर्तन होता है। यह एक **वेक्टर राशि** है, जिसमें दिशा और परिमाण दोनों होते हैं।

  $$a = (v - u) / t,$$

  जहां v = अंतिम गति, u = प्रारंभिक गति, t = समय
  इकाई: मीटर प्रति सेकंड² (m/s^2)

गति के समीकरण (Equations of Motion)
गति के समीकरण तीन मुख्य समीकरण हैं जो वस्तु की गति, त्वरण, विस्थापन, और समय के बीच संबंध को व्यक्त करते हैं:
1. $v = u + at$
2. $s = ut + \frac{1}{2} at^2$
3. $v^2 = u^2 + 2as$

बल (Force)

बल वह कारण है जो किसी वस्तु की स्थिति में बदलाव ला सकता है। बल एक वेक्टर राशि है, जिसका अर्थ है कि इसमें परिमाण और दिशा दोनों होते हैं। **इकाई**: न्यूटन (N)

बल के कुछ प्रकार:
1. **संपर्क बल (Contact Forces)**: ये बल तब उत्पन्न होते हैं जब वस्तुएं आपस में संपर्क करती हैं। जैसे, घर्षण बल (Friction), सामान्य बल (Normal Force), तनाव बल (Tension) आदि।
2. **गैर-संपर्क बल (Non-contact Forces)**: ये बल तब उत्पन्न होते हैं जब वस्तुएं आपस में संपर्क किए बिना एक-दूसरे पर बल डालती हैं। जैसे, गुरुत्वाकर्षण (Gravitational Force), विद्युत बल (Electric Force), चुंबकीय बल (Magnetic Force) आदि।

केंद्रीय बल (Centripetal Force) : यह वह बल होता है जो वृत्तीय गति में एक वस्तु को उसके पथ के केंद्र की ओर खींचता है।

$$\text{Centripetal Force} = m \times v^2 / r$$

जहां m = द्रव्यमान, v = गति, r = वृत्तीय पथ का त्रिज्या

गति के नियम (Laws of Motion)

1. **न्यूटन का पहला नियम (First Law of Motion - Law of Inertia)**:"एक वस्तु अपनी स्थिति (विश्राम या समान गति) में तब तक रहती है जब तक उस पर कोई बाहरी बल कार्य नहीं करता।"
   - **जड़त्व (Inertia)**: यह वह गुण है जिसके द्वारा कोई वस्तु अपनी स्थिति में परिवर्तन का विरोध करती है। यह किसी वस्तु का अपनी स्थिति में बने रहने की प्रवृत्ति है।
   - **उदाहरण**: जब कार अचानक रुकती है, तो चालक और यात्री अपनी गति बनाए रखने की कोशिश करते हैं, जिससे वे सीट बेल्ट से कसकर बंध जाते हैं।
2. **न्यूटन का दूसरा नियम (Second Law of Motion)**: "किसी वस्तु की गति में परिवर्तन (त्वरण) उस पर लगे बल के अनुपाती और उसके द्रव्यमान के विपरीत अनुपाती होता है।"

   $$F = ma,$$

   जहां: **F** = बल (Force), **m** = द्रव्यमान (Mass), **a** = त्वरण (Acceleration)

   उदाहरण: यदि एक व्यक्ति एक हल्की कार को धक्का देता है, तो वह तेज़ी से गति करेगा, लेकिन यदि वह एक भारी ट्रक को धक्का देता है, तो वह धीमा होगा।
3. **न्यूटन का तीसरा नियम (Third Law of Motion - Action and Reaction)**: "प्रत्येक क्रिया के लिए एक समान और विपरीत प्रतिक्रिया होती है।"

   उदाहरण: जब आप दीवार पर हाथ मारते हैं, तो दीवार भी आपके हाथ पर एक समान और विपरीत बल लगाती है।

संवेग (Momentum): संवेग वह भौतिक मात्रा है, जो किसी वस्तु की गति के साथ जुड़ी होती है। यह एक वेक्टर राशि है।

संवेग = द्रव्यमान × गति ($p = mv$)

आवेग (Impulse) : आवेग वह बल है, जो किसी वस्तु पर उसकी गति में परिवर्तन लाने के लिए कार्य करता है।यह एक वेक्टर राशि है।

आवेग = बल × समय

जड़त्व (Inertia) : जड़त्व वह गुण है जिसके द्वारा कोई वस्तु अपनी स्थिति में बदलाव का विरोध करती है। जब तक कोई बाहरी बल उस पर कार्य नहीं करता, वस्तु अपने स्थान या गति में परिवर्तन नहीं करती।

- **उदाहरण**: जब कार तेज़ी से जाती है और अचानक रुकती है, तो उसमें बैठे व्यक्ति को अचानक महसूस होता है जैसे वे आगे की ओर बढ़ रहे हैं, क्योंकि उनकी गति को जड़त्व ने बनाए रखा है।

घर्षण (Friction)

घर्षण वह बल है जो किसी वस्तु के गति करने के विरुद्ध कार्य करता है। यह वस्तु और सतह के बीच के संपर्क के कारण उत्पन्न होता है।

घर्षण के प्रकार:

1. **स्थिर घर्षण (Static Friction)**: यह वह घर्षण होता है जो किसी वस्तु को हिलने से रोकता है जब वह पूरी तरह से रुकी होती है।
2. **गतिक घर्षण (Kinetic Friction)**: यह घर्षण तब होता है जब कोई वस्तु गति में होती है।

   उदाहरण: यदि आप एक बक्सा खींचने की कोशिश करते हैं, तो बक्से और ज़मीन के बीच घर्षण बल कार्य करता है।

गुरुत्वाकर्षण (Gravitation)

गुरुत्वाकर्षण वह बल है जो पृथ्वी पर वस्तुओं को खींचता है। यह हर वस्तु के बीच होता है, लेकिन पृथ्वी द्वारा उत्पन्न गुरुत्वाकर्षण का प्रभाव सबसे अधिक महसूस किया जाता है।

गुरुत्वाकर्षण का सार्वभौमिक नियम (Universal Law of Gravitation):

$$F = G * (m_1 * m_2) / r^2,$$

जहां **G** = गुरुत्वाकर्षण स्थिरांक, m_1, m_2 = द्रव्यमान, **r** = दूरी।

गुरुत्वीय त्वरण (Gravitational Acceleration): पृथ्वी पर किसी वस्तु पर गुरुत्वाकर्षण द्वारा उत्पन्न त्वरण $g = 9.8\ m/s^2$ होता है। यह वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता।

केपलर के नियम (Kepler's Laws) : केपलर ने तीन नियम दिए हैं जो ग्रहों की सूर्य के चारों ओर घूमने की गति को स्पष्ट करते हैं:

1. **केपलर का पहला नियम:** ग्रह सूर्य के चारों ओर अंडाकार कक्षा में चलते हैं
2. **केपलर का दूसरा नियम:** ग्रहों द्वारा सूर्य के चारों ओर खींची गई रेखा समान समय में समान क्षेत्रफल में यात्रा करती है।
3. **केपलर का तीसरा नियम:** ग्रहों की कक्षीय अवधि का वर्ग उनके औसत दूरी के घनफल के अनुपाती होता है।

कार्य (Work)

कार्य (W) उस बल (F) का परिणाम होता है, जो किसी वस्तु को एक निश्चित दूरी (d) तक खींचने के लिए लगाते हैं, और यह बल उस दिशा में हो, जिसमें वस्तु खींची जाती है।

$$W = F \times d \times \cos(\theta)$$

जहां: **W** = कार्य (Work), **F** = बल (Force), **d** = वस्तु द्वारा तय की गई दूरी (Distance), **θ** = बल और गति के बीच का कोण (Angle between Force and Displacement)

- कार्य की इकाई **जूल (Joule)** होती है। 1 जूल कार्य तब होता है जब 1 न्यूटन बल किसी वस्तु पर 1 मीटर दूरी तक काम करता है।
- जब बल और विस्थापन की दिशा एक दूसरे के लम्बवत होती तो कार्य शून्य होता हैं ।

ऊर्जा (Energy)

ऊर्जा को कार्य करने की क्षमता के रूप में समझा जा सकता है। अगर किसी वस्तु में ऊर्जा है, तो वह कार्य कर सकती है।

ऊर्जा के प्रकार:

1. **काइनेटिक ऊर्जा (Kinetic Energy)**: यह ऊर्जा किसी वस्तु के गति के कारण होती है।

   $$KE = ½ mv^2$$

   जहां : **m** = द्रव्यमान (Mass), **v** = गति (Velocity)

2. **संवहनीय ऊर्जा (Potential Energy)**: यह ऊर्जा किसी वस्तु के ऊँचाई पर होने के कारण होती है, जैसे किसी वस्तु को ऊपर उठाने से।

PE = mgh

जहां, m = द्रव्यमान (Mass), **g** = गुरुत्वीय त्वरण (Gravitational Acceleration), **h** = ऊँचाई (Height)

3. **रासायनिक ऊर्जा (Chemical Energy)**: यह ऊर्जा रासायनिक प्रतिक्रियाओं के दौरान उत्पन्न होती है।
   उदाहरण: ईंधन में संचित ऊर्जा।
4. **तापीय ऊर्जा (Thermal Energy)**: यह ऊर्जा तापमान में परिवर्तन के कारण उत्पन्न होती है।
   इकाई: ऊर्जा की इकाई भी **जूल (Joule)** होती है, और यह कार्य की इकाई के समान होती है।

शक्ति (Power)

शक्ति (P) वह दर है, जिस पर कार्य (W) किया जाता है या ऊर्जा (E) का रूपांतरण होता है।

P = W / t

जहां: **P** = शक्ति (Power), **W** = कार्य (Work) या ऊर्जा (Energy), **t** = समय (Time)

शक्ति की इकाई **वॉट (Watt)** होती है, और **1 वॉट** वह शक्ति है, जब 1 जूल कार्य 1 सेकंड में किया जाता है।

शक्ति की परिभाषाएँ:

- **1 वॉट (Watt)** = 1 जूल / सेकंड
- **1 किलोवॉट (Kilowatt)** = 1000 वॉट

ताप (Heat)

ताप ऊर्जा का वह रूप है, जो किसी पदार्थ के कणों के गतिज ऊर्जा के कारण उत्पन्न होती है। ताप उस ऊर्जा को कहते हैं, जो किसी उच्च तापमान वाले पदार्थ से कम तापमान वाले पदार्थ में स्थानांतरित होती है। जब दो पदार्थों के बीच तापमान में अंतर होता है, तब गर्मी का प्रवाह होता है।

ताप के प्रकार (Types of Heat)

1. **संचालन (Conduction):** यह ताप का वह रूपांतरण होता है, जब ऊर्जा एक पदार्थ से दूसरे पदार्थ में सीधे संपर्क द्वारा स्थानांतरित होती है। यह तब होता है जब एक ठोस पदार्थ के एक हिस्से को गर्म किया जाता है और उस गर्मी को बाकी हिस्सों में फैलने में समय लगता है।
   उदाहरण: धातु की छड़ी को आग में डालने से उसकी गर्मी दोनों सिरों तक पहुँच जाती है।
2. **संवहन (Convection):** यह वह प्रक्रिया है जिसमें गर्म द्रव या गैस का एक स्थान से दूसरे स्थान पर स्थानांतरण होता है, जिससे ताप का प्रवाह होता है। जब द्रव या गैस गर्म होती है, तो उसकी घनता घट जाती है और वह ऊपर उठती है, और ठंडी हवा या द्रव उसकी जगह लेता है।
   उदाहरण: पानी को गरम करने पर उसके ऊपर के तापमान में वृद्धि होती है, और वह ऊपर की ओर उठता है, जबकि ठंडा पानी नीचे रहता है।
3. **किरण (Radiation):** यह वह प्रक्रिया है, जिसमें गर्मी निर्वात (vacuum) में भी यात्रा कर सकती है। इसमें किसी पदार्थ से ऊर्जा की तरंगों के रूप में स्थानांतरण होता है।
   उदाहरण: सूर्य से आने वाली गर्मी।

थर्मोडायनामिक्स (Thermodynamics)

थर्मोडायनामिक्स ऊर्जा और ताप के परिवर्तन से संबंधित विज्ञान है। यह विशेष रूप से यह अध्ययन करता है कि ताप और ऊर्जा किस प्रकार स्थानांतरित होती है और किस प्रकार कार्य किया जाता है।

थर्मोडायनामिक्स के नियम (Laws of Thermodynamics)

1. **पहला नियम (First Law of Thermodynamics) - ऊर्जा का संरक्षण**: पहला नियम यह कहता है कि ऊर्जा न तो उत्पन्न होती है, न नष्ट होती है, केवल रूप बदलती है। ऊर्जा का कुल राशि हमेशा स्थिर रहती है।

   ΔU = Q - W,

   जहां **ΔU** = आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन, **Q** = गर्मी, **W** = कार्य।
   उदाहरण: जब आप एक गाड़ी में ईंधन जलाते हैं, तो रासायनिक ऊर्जा को यांत्रिक ऊर्जा में बदल दिया जाता है।
2. **दूसरा नियम (Second Law of Thermodynamics) - एंट्रॉपी और ऊर्जा का प्रवाह**: यह नियम कहता है कि ऊर्जा का प्रवाह हमेशा उच्च तापमान से निम्न तापमान की ओर होता है, और इस प्रक्रिया के दौरान समग्र एंट्रॉपी (व्यवस्था की अव्यवस्था) बढ़ती है।
   उदाहरण: जब गर्म पानी और ठंडे पानी को मिलाया जाता है, तो गर्म पानी ठंडा हो जाता है और ठंडा पानी गर्म हो जाता है, एंट्रॉपी बढ़ती है क्योंकि ऊर्जा का प्रवाह हमेशा उच्च से निम्न तापमान की ओर होता है।
3. **तीसरा नियम (Third Law of Thermodynamics) - शून्य तापमान पर एंट्रॉपी**: यह नियम कहता है कि जब किसी पदार्थ का तापमान शून्य केल्विन (0 K) पर पहुँचता है, तो उसकी एंट्रॉपी न्यूनतम (या शून्य) होती है।
   उदाहरण: सटीक शून्य तापमान पर, सभी कण अपनी न्यूनतम ऊर्जा स्थिति में होते हैं।
4. **शून्यवां नियम (Zeroth Law of Thermodynamics)**: यह नियम कहता है कि अगर दो वस्तुएं एक तीसरी वस्तु के साथ तापीय संतुलन में हैं, तो वे एक दूसरे के साथ भी तापीय संतुलन में होंगी।
   उदाहरण: यदि वस्तु A और वस्तु B, वस्तु C के साथ तापीय संतुलन में हैं, तो वस्तु A और वस्तु B भी तापीय संतुलन में होंगी।

तापीय संतुलन (Thermal Equilibrium) : जब दो वस्तुएं एक-दूसरे के संपर्क में होती हैं और समय के बाद दोनों का तापमान समान हो जाता है, तो उन्हें तापीय संतुलन में कहा जाता है।