Toppersnotes
Unleash the topper in you

झारखण्ड

झारखण्ड तकनीकी / विशिष्ट योग्यताधारी स्नातक स्तरीय संयुक्त प्रतियोगिता परीक्षा

भाग - 3

सामान्य गणित एवं मानसिक क्षमता जांच

SIERRA INNOVATIONS

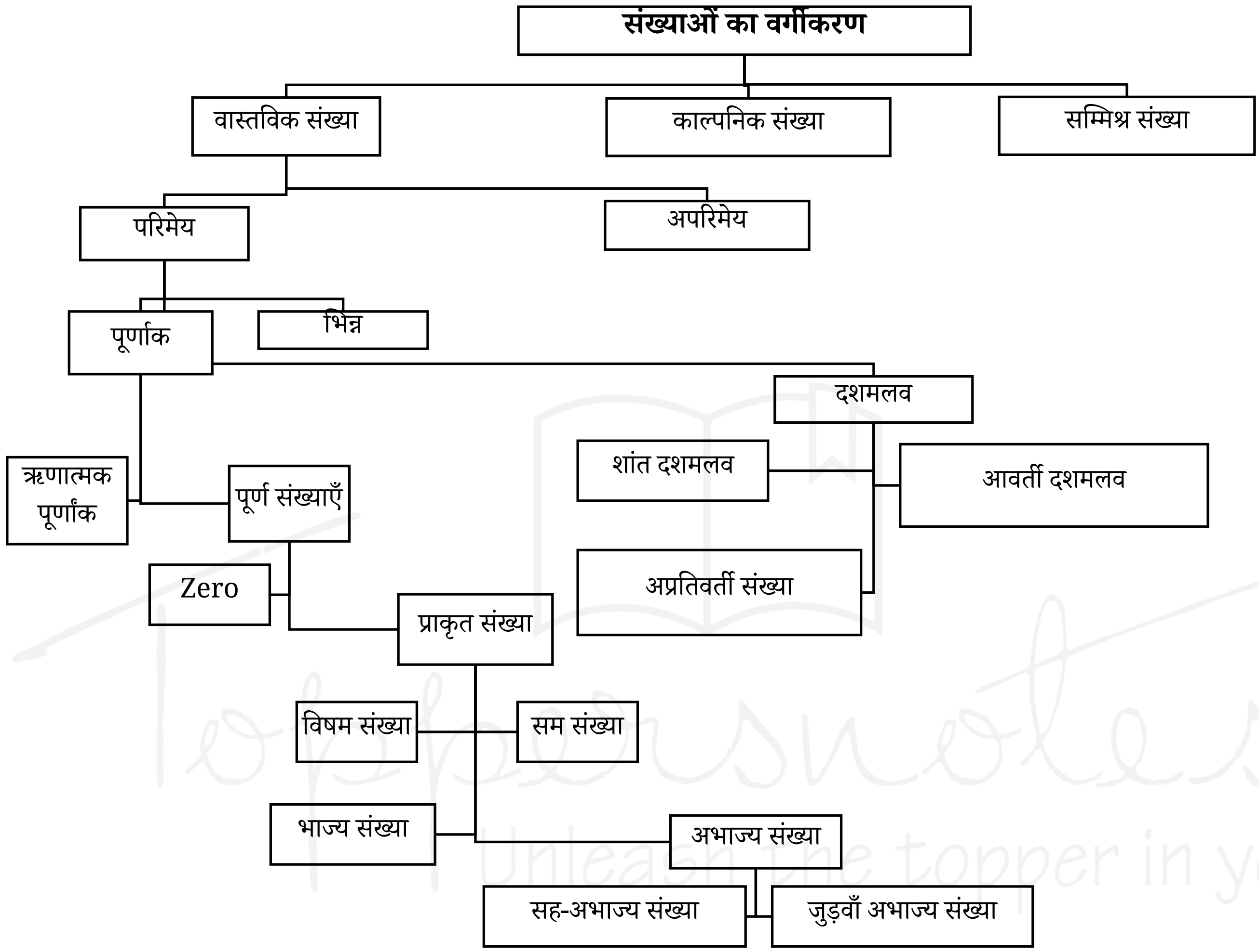
विषयसूची

विषयसूची

1
CHAPTER

संख्या पद्धति

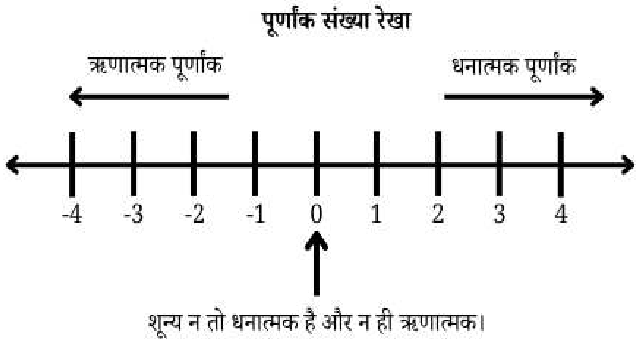
- **संख्या पद्धति :** संख्या पद्धति, संख्याओं को दर्शाने और उनके साथ काम करने की एक ऐसी विधि है जिसमें प्रतीकों और नियमों के एक परिभाषित समूह का उपयोग किया जाता है।



Types	Definition
वास्तविक संख्या	एक वास्तविक संख्या कोई भी ऐसी संख्या होती है जिसे संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है। वास्तविक संख्या एक ऐसी संख्या है जिसमें सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ शामिल होती हैं, और जिसे संख्या रेखा पर एक बिंदु के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
परिमेय संख्या	एक परिमेय संख्या वह संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।
अपरिमेय संख्या	एक अपरिमेय संख्या वह संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।
भिन्न	भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी पूर्ण वस्तु के एक भाग को, या दो राशियों के अनुपात को दर्शाती है। इसे $\frac{a}{b}$ के रूप में लिखा जाता है।
पूर्णांक	एक पूर्णांक एक पूर्ण संख्या होती है जो धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकती है, और इसमें कोई भिन्नात्मक या दशमलव भाग शामिल नहीं होता।

ऋणात्मक पूर्णांक	ऋणात्मक पूर्णांक वे पूर्ण संख्याएँ हैं जिनके साथ ऋणात्मक चिह्न होता है, जैसे -1, -2, -3, ...
पूर्ण संख्या	पूर्ण संख्या एक ऋणेतर पूर्णांक है, जिसमें शून्य भी शामिल है।
प्राकृत संख्या	प्राकृतिक संख्याएँ वे संख्याएँ हैं जो 1 से शुरू होती हैं और हर बार 1 से बढ़ती जाती हैं। 1, 2, 3, 4,...
विषम संख्या	एक विषम संख्या वह प्राकृत संख्या है जो 2 से विभाज्य नहीं होती, अथवा $2n + 1$ के रूप में होती है।
सम संख्याएँ	एक सम संख्या वह प्राकृत संख्या है जो 2 से पूरी तरह विभाज्य होती है, या 2n. के रूप में होती है।
अभाज्य संख्या	अभाज्य संख्या एक ऐसी प्राकृत संख्या है जो 1 से बड़ी होती है और जिसके ठीक दो अलग-अलग गुणनखंड होते हैं: 1 और वह संख्या स्वयं। 2, 3, 5, 7. ➢ 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है। ➢ 2 एकमात्र सम अभाज्य संख्या है। ➢ सभी अभाज्य संख्याओं (2 और 3 को छोड़कर) को $6n + 1$या $6n + 5$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है; हालाँकि, इसका विलोम सत्य नहीं है। ➢ (3, 5, 7) तीन अभाज्य संख्याओं का एकमात्र ऐसा समूह है, जो लगातार विषम संख्याएँ हैं। ➢ 101 तीन अंकों की सबसे छोटी अभाज्य संख्या है। ➢ 997 तीन अंकों की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।
भाज्य संख्या	भाज्य संख्या एक ऐसी प्राकृत संख्या है जो 1 से बड़ी होती है और जिसके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं। एक भाज्य संख्या को 1 से, स्वयं से, और कम से कम किसी एक अन्य संख्या से पूरी तरह विभाजित किया जा सकता है। 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14... ➢ सबसे छोटी भाज्य संख्या 4 है। ➢ 9सबसे छोटी विषम भाज्य संख्या 9 है। यदि a और b कोई दो विषम अभाज्य संख्याएँ हैं, तो $a^2 + b^2$ और $a^2 - b^2$ भाज्य संख्याएँ होती हैं।
सह-अभाज्य संख्याएँ	दो या दो से अधिक संख्याओं को सह-अभाज्य (या सापेक्षतः अभाज्य) कहा जाता है, यदि उनका एकमात्र उभयनिष्ठ गुणनखंड (HCF) 1 हो। ➢ 1 न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या।
जुड़वां अभाज्य संख्याएँ	जुड़वां संख्याएँ (जुड़वां अभाज्य) अभाज्य संख्याओं का एक ऐसा जोड़ा होती हैं, जिनका अंतर ठीक 2 होता है। ➢ 5 ही एकमात्र ऐसी अभाज्य संख्या है, जो 2 जुड़वां अभाज्य जोड़ों में शामिल है। (3, 5) (5, 7) ➢ जुड़वां अभाज्य संख्याओं का योग (3 और 5 को छोड़कर) हमेशा 12 से विभाज्य होता है।
दशमलव संख्या	दशमलव संख्या एक ऐसी संख्या होती है जिसमें एक दशमलव बिंदु (.) होता है, और जो एक पूर्ण भाग तथा एक भिन्नात्मक भाग से मिलकर बनी होती है। उदाहरण- 3.5, 12.75 आदि।
शांत दशमलव	एक ऐसी दशमलव संख्या है जो दशमलव बिंदु के बाद अंकों की एक निश्चित संख्या के बाद समाप्त हो जाती है। उदाहरण- 2.5, 0.75

अशांत आवर्ती दशमलव	एक अशांत आवर्ती दशमलव वह दशमलव संख्या है जो कभी समाप्त नहीं होती, और जिसमें दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंक लगातार दोहराए जाते हैं। उदाहरण- 0.333..., 0.1212
अशांत अनावर्ती दशमलव	एक अनन्त और अनावर्ती दशमलव वह दशमलव संख्या है जो कभी समाप्त नहीं होती और दशमलव बिंदु के बाद कोई भी अंक या पैटर्न दोहराती नहीं है। उदाहरण- 1.1412, 3.14
काल्पनिक संख्या	काल्पनिक संख्या वह संख्या होता है जिसे = bi के रूप में लिखा जा सकता है b एक वास्तविक संख्या है i काल्पनिक इकाई है, जिसे इस तरह से परिभाषित किया गया है
सम्मिश्र संख्या	एक सम्मिश्र संख्या वह संख्या है जिसके दो भाग होते हैं—एक वास्तविक भाग और एक काल्पनिक भाग—और जिसे मानक रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है: z = a + ib a -वास्तविक संख्या , जिसे z का वास्तविक भाग कहा जाता है। b एक वास्तविक संख्या है, जिसे z का काल्पनिक भाग कहा जाता है। i काल्पनिक इकाई है, जिसे इस गुणधर्म द्वारा परिभाषित किया जाता है:



अभाज्य संख्या तो पता करना

- यह पता लगाने के लिए कि कोई संख्या अभाज्य है या नहीं, सबसे पहले उसका वर्गमूल (square root) निकालें और उसे निकटतम पूर्ण संख्या तक पूर्णांकित (round down) करें। फिर यह जाँचें कि क्या वह संख्या इस मान तक की किसी भी अभाज्य संख्या से विभाज्य है। यदि वह उनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है, तो वह संख्या एक अभाज्य संख्या है।

के बीच	अभाज्य संख्या
1-50	15
1-100	25
1-200	46

रामानुजन संख्या

रामानुजन संख्या एक ऐसी संख्या है जिसे दो अलग-अलग तरीकों से, दो धनात्मक घनों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसे हार्डी-रामानुजन संख्या या टैक्सी-कैब संख्या के नाम से भी जाना जाता है।

सबसे छोटी रामानुजन संख्या = 1729

$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$

पूर्ण संख्या

पूर्ण संख्या एक ऐसी प्राकृत संख्या है जो अपने उचित भाजकों (अर्थात्, स्वयं उस संख्या को छोड़कर उसके सभी धनात्मक भाजकों) के योग के बराबर होती है।

उदा: 4, 1 और 2 से विभाज्य है, इसलिए $1 + 2 = 3 \neq 4$; अतः, 4 एक पूर्ण संख्या नहीं है।

6, 1, 2 और 3 से विभाज्य है, इसलिए $1 + 2 + 3 = 6 = 6$; अतः, 6 एक पूर्ण संख्या है।

Key points

सम + सम = सम
सम × सम = सम
सम + विषम = विषम
सम × विषम = सम
विषम + विषम = सम
विषम × विषम = विषम

Type 1: परिभाषाओं पर आधारित प्रश्न

उदा: 173 एक अभाज्य संख्या है या नहीं

हल: 173 का वर्गमूल लगभग 13 है। 13 से कम या उसके बराबर अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7, 11 और 13 हैं।

चूँकि 173 किसी भी संख्या से विभाज्य नहीं है, इसलिए यह एक अभाज्य संख्या है।

उदा: x, y और z तीन अलग-अलग अभाज्य संख्याएँ हैं, जहाँ $x < y < z$ है। यदि $x + y + z = 70$ हो, तो z का मान क्या होगा?

हल: यहाँ, योग 70 है, जिसका अर्थ है कि इन संख्याओं में से कम से कम एक संख्या सम (even) है। जैसा कि हम जानते हैं, केवल एक ही सम अभाज्य संख्या होती है, और वह है 2

2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या भी है।

इसका अर्थ है कि $x = 2$

अब, $70 - 2 = 68 = y + z$

विभिन्न अभाज्य संख्याओं के मान रखकर देखने पर हमें परिणाम प्राप्त होता है:

$y = 31$ और $x = 37$

उदा: 53 से 97 के बीच कितनी भाज्य (composite) संख्याएँ हैं?

हल: यदि हम 53 और 97 के बीच की कुल पूर्णांक संख्याएँ ज्ञात करें और फिर उनमें से अभाज्य संख्याओं की संख्या घटा दें, तो हमें भाज्य संख्याओं की संख्या प्राप्त हो जाएगी।

कुल संख्या = $97 - 53 + 1 = 45$ (+1 तब जोड़ा जाता है जब दोनों संख्याओं को शामिल किया जाता है)

53 से 97 के बीच कुल अभाज्य संख्याएँ 10 हैं।

अतः, भाज्य संख्याएँ = 45 - 10 = 35

उदाहरण: निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

(A) सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक होती हैं।

(B) सभी वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय होती हैं।

(C) परिमेय संख्याएँ वास्तविक नहीं होतीं।

(D) पूर्णांक परिमेय नहीं होते।

हल: अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याओं का एक उपसमुच्चय (subset) होती हैं, इसलिए सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक होती हैं।

सभी वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय नहीं होतीं;

परिमेय संख्याएँ भी वास्तविक होती हैं।

परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ ही होती हैं।

पूर्णांक परिमेय संख्याओं का एक उपसमुच्चय होते हैं, क्योंकि किसी भी पूर्णांक को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है (उदाहरण के लिए, $5 = \frac{5}{1}$)

अतः, सही उत्तर (A) है।

Special concept: खास तरह की संख्याओं के अंकों के योग पर आधारित

संख्या	वर्ग	अंको का योग
11^2	121	3
111^2	12321	9
So, on		
111111111^2	12345678987654321	81

उदा: एक 9-अंकों वाली संख्या का हर अंक 1 है। इसे उसी संख्या से गुणा किया जाता है। इससे जो संख्या बनती है, उसके अंकों का योग क्या होगा?

हल: concept का प्रयोग करने पर

$111111111^2 \Rightarrow 81$

Type 2: इकाई अंको पर आधारित प्रश्न

किसी व्यंजक का इकाई का अंक ज्ञात करने के लिए, पूरे व्यंजक का मान निकालने के बजाय केवल संख्याओं के इकाई के अंकों पर विचार करें।
$(a + b)$इकाई अंक = a का इकाई अंक + b का इकाई अंक
$(a - b)$ इकाई अंक = a का इकाई अंक − b का इकाई अंक
$(a \times b)$ इकाई अंक = a का इकाई अंक × b का इकाई अंक

उदा: 435×433 का इकाई अंक ज्ञात कीजिए

हल:

$a \times b$ का इकाई अंक = a का इकाई अंक × b का इकाई अंक

5×3=15, इसलिए इकाई अंक 5 है।

चक्रीयता

संख्या प्रणाली में चक्रीयता का अर्थ है अंकों या शेषफलों का वह दोहराया जाने वाला पैटर्न, जो तब बनता है जब किसी संख्या को उच्च घातों तक बढ़ाया जाता है। इकाई का अंक सभी घातों के लिए अपरिवर्तित रहता है।

$0 \rightarrow 0$ $\quad$ $1 \rightarrow 1$

$5 \rightarrow 5$ $\quad$ $6 \rightarrow 6$

2 की चक्रीयता: इकाई का अंक दो मानों के बीच बारी-बारी से बदलता है।

$4 \rightarrow 4, 6$

जब घात विषम होती है, तो इकाई का अंक 4 होता है, और जब घात सम होती है, तो इकाई का अंक 6 होता है।

$9 \rightarrow 9, 1$

जब घात विषम होती है, तो इकाई का अंक 9 होता है, और जब घात सम होती है, तो इकाई का अंक 1 होता है।

4 की चक्रीयता: इकाई का अंक चार घातों के बाद दोहराता है।

$2 \rightarrow 2, 4, 8, 6$ $\quad$ $3 \rightarrow 3, 9, 7, 1$

$7 \rightarrow 7, 9, 3, 1$ $\quad$ $8 \rightarrow 8, 4, 2, 6$

माना, $N = x^y$

(N) का इकाई अंक ज्ञात करने के लिए, हमें केवल आधार संख्या (x) के इकाई अंक पर विचार करने की आवश्यकता होती है। किसी घातीय व्यंजक का इकाई अंक, घात को 4 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात करके निर्धारित किया जा सकता है।

Type 3: चक्रीयता -अंकगणितीय समीकरणों पर आधारित इकाई के अंक पर आधारित प्रश्न

उदा: यदि $x = (164)^{169} + (333)^{337} - (727)^{726}$ x का इकाई अंक ज्ञात कीजिए?

हल: इस व्यंजक में, पहले पद में 4 की घात विषम है, इसलिए पहले पद का इकाई का अंक 4 है। दूसरे पद के लिए, 337 को 4 से भाग देने पर शेषफल 1 आता है, इसलिए दूसरे पद का इकाई का अंक 3 है। तीसरे पद के लिए, 726 को 4 से भाग देने पर शेषफल 2 आता है; अतः, तीसरे पद का इकाई का अंक 9 है।

इसलिए, व्यंजक का इकाई का अंक $4 + 3 - 9 = -2$ है।

यदि इकाई का अंक ऋणात्मक आता है, तो सही इकाई का अंक प्राप्त करने के लिए उसमें 10 जोड़ दें। इकाई का अंक $10 - 2 = 8$ है।

उदा: $1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + 20^5$ का इकाई का अंक ज्ञात कीजिए

हल: प्रत्येक पद में, चक्रीयता 1 है। इसलिए, प्रत्येक पद के लिए, इकाई का अंक वही होता है जो स्वयं उस संख्या का होता है।

1 से 10 तक की संख्याओं के लिए इकाई का अंक शून्य होता है।

$$= (1 + 2 + 2..+9 + 0) + (1 + 2 + 3..+9 + 0) = 0$$

उदा: $x = 187^{280} \times 529^{320} \times 343^{236}$ का इकाई का अंक ज्ञात कीजिए

हल: यदि शेषफल 0 आता है, तो घात को 4 के बराबर मान लें।

पहले के पद के लिए $- 7^4$ की चक्रीयता 1

दुसरे पद के लिए –9 की घात सम है, इसलिए इकाई का अंक 1 है।

तीसरे पद के लिए - 3^4 की चक्रीयता 1

इकाई का अंक $= 1 \times 1 \times 1 = 1$

उदा: व्यंजक का इकाई का अंक $(57242)^{9\times7\times5\times3\times1}$?

हल: हम केवल अंक 2 की जाँच करते हैं। घात को 4 से विभाजित किया जाएगा।

$= 2^{1\times(-1)\times1\times(-1)\times1} = 2^1$

अत: इकाई का अंक = 2

Type 4: गिनती पर आधारित प्रश्न (कोई अंक, पृष्ठ या key stokes की गिनती)

1 to 9 → आवश्यक अंक = 9	
10 to 99 → 90×2 = 180	

उदा: 428 पृष्ठों वाली एक पुस्तक की नंबरिंग करने के लिए कितने अंकों की आवश्यकता होगी?

हल : 1 to 9 → आवश्यक अंक = 9

10 to 99 → 90×2 = 180

100 से 428 = (428-100+1) = 329→329×3=987

आवश्यक अंकों की कुल संख्या = 9 +180 + 987 =1176

Type 5: पूर्ण वर्ग पर आधारित प्रश्न

यह कैसे जांचें कि कोई संख्या पूर्ण वर्ग है या नहीं (यह केवल संभावना दर्शाता है)

1. किसी भी पूर्ण वर्ग संख्या के अंतिम दो अंक 1 से 24 तक की संख्याओं के वर्गों में से ही होने चाहिए।
2. इकाई का अंक 2, 3, 7 या 8 नहीं होना चाहिए।
3. संख्या और उसके हर (denominator) में शून्यों की संख्या सम (even) होनी चाहिए।
4. किसी पूर्ण वर्ग संख्या को 9 से भाग देने पर शेषफल 0, 1, 4 या 7 ही आना चाहिए।

उदा: क्या यह संभव है कि 562576 एक पूर्ण वर्ग संख्या हो?

हल: संख्या का अंत 76 से होता है, जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या के लिए संभव है। इकाई का अंक 6 है, इसलिए इस संख्या के पूर्ण वर्ग होने की संभावना है।

562576 के अंकों का योग = 21

9 से भाग देने पर शेषफल 3 आता है।

अतः, यह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है।

Type 6: दशमलव को भिन्न में बदलना

- हर में शून्यों की संख्या, दशमलव बिंदु के बाद आने वाले अंकों की संख्या के बराबर होती है।

$$0.abc = \frac{abc}{1000}$$

- हर में 9 की संख्या, दशमलव बिंदु के बाद आने वाले अंकों की संख्या के बराबर होती है।

$$0.\overline{abc} = \frac{abc}{999}$$

- जब कुछ अंकों पर ओवरलाइन (overline) नहीं होता है

$$0.a\overline{bc} = \frac{abc - a}{990}$$

$$0.ab\overline{cd} = \frac{abcd - ab}{9900}$$

- मिश्रित अवधारणा

$$a.b\overline{cd} = a + \frac{bcd - b}{990} = \frac{abcd - ab}{990}$$

उदा: यदि $A = 0.3\overline{12}$, $B = 0.4\overline{15}$ और $C = 0.30\overline{9}$ तो दिए गये व्यंजक का मान $A + B + C$.

हल:

$$A + B + C = \frac{312 - 3}{990} + \frac{415 - 4}{990} + \frac{309 - 30}{900}$$

$$A + B + C = \frac{720}{999} + \frac{279}{900}$$

$$A + B + C = \frac{10269}{9900} = \frac{1141}{1100}$$

Type 7: शून्यो की संख्या

- किसी संख्या के अंत में आने वाले शून्य, उसके गुणनखंडन में 10 की संख्या से निर्धारित होते हैं; यह मुख्य रूप से 5 और 2 के जोड़ों पर आधारित होता है।
- फैक्टोरियल एक गणितीय संक्रिया है जो गैर-ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए परिभाषित है।
- किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए, n का फैक्टोरियल (जिसे $n!$ से दर्शाया जाता है) 1 से लेकर n तक के सभी धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल होता है।

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$
$$0! = 1, \ 1! = 1$$

  - ✓ 4! के बाद आने वाली संख्याओं का इकाई अंक शून्य होता है।
  - ✓ 4! और उसके बाद आने वाले सभी फैक्टोरियल 4 से विभाज्य होते हैं।
  - ✓ ‘n’ क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल n से विभाज्य होता है।
- फैक्टोरियल में निहित संख्या की घात: $n!$ में निहित किसी अभाज्य संख्या ‘p’ की उच्चतम घात निम्न प्रकार दी जाती है:

$$= \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

- n क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सदैव $n!$ से विभाज्य होता है।

उदा: तीन संख्याएँ 24, 25 और 26 किससे विभाज्य हैं?

हल: n क्रमागत प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सदैव n! से विभाज्य होता है।

अर्थात् 24, 25, 26, 3! से विभाज्य हैं।

उदा: 100! में अंत में आने वाले शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: 100! में 2 के गुणनखंड प्रचुर मात्रा में होते हैं, इसलिए हम केवल 5 के गुणनखंडों की गणना करते हैं।

5 का प्रत्येक गुणज, 5 का कम से कम एक गुणनखंड प्रदान करता है। 25, 50, 75, 100 जैसी संख्याओं में 5 का एक अतिरिक्त गुणनखंड होता है, क्योंकि $25 = 5^2$होता है।

$$\left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{25}\right] + \left[\frac{100}{125}\right] = 20 + 4 + 0 = 24$$

अंत में आने वाले शून्यों की संख्या = 24

उदा: 2×4×6...×250 में अंत में आने वाले शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: 2 के गुणनखंड बहुत ज़्यादा हैं, इसलिए हम सिर्फ़ 5 के गुणनखंडों को गिनेंगे।

$$2 \times 4 \times 6 \ldots \times 250 = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \ldots . (2 \times 125)$$

$$(2 \times 1) \times (2 \times 2) \ldots . (2 \times 125) = 2^{125}(1 \times 2 \times \ldots 125)$$

$$2^{125}(1 \times 2 \times \ldots 125) = 2^{125} \times 125!$$

$$\left[\frac{125}{5}\right] + \left[\frac{125}{25}\right] + \left[\frac{125}{125}\right] = 25 + 5 + 1 = 31$$

अंत में आने वाले शून्यों की संख्या = 31

विभाज्यता

संख्या	विभाज्यता का नियम
2	अंतिम अंक 0, 2, 4, 6, 8 हो
3	अंकों का योग 3 से विभाज्य हो
4	अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 4 से विभाज्य हो
5	अंतिम अंक 0 या 5 हो
25	अंतिम दो अंक 00 हों या 25 से विभाज्य हों
6	संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य हो
7	अंतिम अंक का दुगुना शेष संख्या में से घटाएँ; परिणाम 7 से विभाज्य हो
8	अंतिम तीन अंक 8 से विभाज्य हों
9	अंकों का योग 9 से विभाज्य हो
11	सम और विषम स्थानों पर स्थित अंकों के योग का अंतर 0 हो या 11 से विभाज्य हो

Special cases

1. 1001 = 7×11×13

   $1001 \times abc = abcabc$
2. 10101 = 3×7×13×37

   $10101 \times ab = ababab$

Type 8: विभाज्यता के नियमों पर आधारित प्रश्न

उदा: एक संख्या N, 9 को 99 बार लिखकर बनाई जाती है। यदि N को 13 से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: जब कोई संख्या n बार दोहराई जाती है, तो 6-अंकों की संख्या का संयोजन 7, 11 और 13 से विभाज्य होता है।

96 बार लिखा गया 9, 13 से विभाज्य होगा, और केवल तीन 9 शेष बचेंगे।

$$= \frac{999}{13} \Rightarrow R \rightarrow 11$$

उदा: $(a + b)$ का वह सबसे बड़ा संभव मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए 8-अंकों की संख्या 143b203a, 15 से विभाज्य हो।

हल: 3 की विभाज्यता - यदि इसके अंकों का योग 3 से विभाज्य हो।

5 की विभाज्यता - यदि अंतिम अंक 0 या 5 हो, तो पूरी संख्या 5 से विभाज्य होती है।

15 के गुणनखंड = (3 × 5); अतः, संख्या 3 और 5 दोनों से विभाज्य होनी चाहिए।

इसलिए, a का मान 0 या 5 हो सकता है। लेकिन, क्योंकि प्रश्न में सबसे बड़ा मान पूछा गया है, इसलिए a का मान 5 ही होना चाहिए।

इसके बाद, संख्या के अंकों का = 18+b

सबसे बड़े मान के लिए = b=9

अतः, $(a + b) = (9 + 5) = 14$

उदा: यदि 9-अंकों की संख्या 72x8431y4, 36 से विभाज्य है, तो y के सबसे छोटे संभव मान के लिए $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए; जहाँ x और y प्राकृत संख्याएँ हैं।

हल: 36 की विभाज्यता का नियम यह है कि संख्या 4 और 9 दोनों से विभाज्य होनी चाहिए।

अंतिम दो अंकों की संख्या = y4; y = 2 रखने पर, अंतिम दो अंकों की संख्या 24 हो जाती है।

इसलिए, y का मान = 2 है। (y सबसे छोटा संभव मान है)

9 से विभाज्यता के नियम के अनुसार,

संख्या का योग = $31 + x$

अतः, $x = 5$

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{5}\right)=2\frac{1}{10}$$

Type 9: व्यंजकों की विभाज्यता

व्यंजक	'n' विषम हो	'n' सम हो
$x^n - y^n$	$(x-y)$	$(x+y)(x-y)$
$x^n + y^n$	$(x+y)$	Can't say

उदा:यदि $(17^{26}-11^{26})$ is को 42 से भाग दिया जाये तो शेषफल क्या होगा?

हल : n सम है .अतः, $(x+y)(x-y)$

$$=\frac{(17+11)(17-11)}{42}=\frac{28\times 6}{42},$$

शेषफल = 0

Key Point: यदि 'n' विषम है और $a, b, c \dots z$ क्रमागत प्राकृत संख्याएँहै तो $(a^n + b^n + \cdots + z^n)$, $(a+b+c \dots z)$ से विभाज्य होगा

उदा: $11^5 + 12^5 + 13^5$ किससे विभाज्य है ?

हल: 11+12+13 = 36

इसलिए, यह व्यंजक 36 से विभाज्य है।

Type 10: अंक और उसका विपरीत रूप (2-अंकीय और 3-अंकीय)

1. 2 अंकों वाली संख्या के लिए:

माना , मूल दो अंको वाली संख्या $= 10x + y$,

विपरीत संख्या $= 10y + x$

दोनों संख्याओ का योग

$(10x+y)+(10y+x)=11(x+y)$

दोनों संख्याओ का अंतर

$(10x+y)-(10y+x)=9(x-y)$

2. 3-अंकों वाली संख्या के लिए:

मान, सैकड़े का अंक = x, दहाई का अंक = y,

इकाई का अंक = z

मूल संख्या $= 100x + 10y + z$

सैकड़े और इकाई के अंकों को आपस में बदलने पर,

नई संख्या $= 100z + 10y + x$

दोनों संख्याओ का अंतर $= 99(x-z)$

उदा: दो-अंकों वाली किसी संख्या और उसके अंकों को आपस में बदलने पर प्राप्त संख्या का योग 99 है। यदि अंकों का अंतर 1 है, तो वह संख्या क्या है?

हल: माना ,संख्या $= 10x + y$

$(10x+y)+(10y+x)=99$

$x+y=9$

$x-y=1$

समीकरण हल करने पर $x = 5, y = 4$

अतः, संख्या है= $10\times 5+4=54$

उदा: संख्या 23x45678 को 22 से विभाज्य बनाने के लिए रिक्त स्थान में भरी जाने वाली सबसे छोटी प्राकृत संख्या क्या होगी?

हल: 22 के लिए विभाज्यता का नियम 2 और 11 दोनों से विभाज्यता पर आधारित है। कोई संख्या 11 से तब विभाज्य होती है, जब उसके विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य हो।

विषम स्थानों का योग: $3+4+6+8=21$

सम स्थानों का योग: $2+x+5+7=14+x$

$21-(14+x)=7-x$

$7-x=11k$, जहाँ k कोई पूर्णांक है

x के सबसे छोटे मान के लिए, मान लीजिए$k=0$

$7-x=0 \Rightarrow x=7$

अतः, x का वह सबसे छोटा मान जो संख्या 23x45678 को 22 से विभाज्य बनाता है, 5 है।

उदा: 700 से 950 तक (दोनों को मिलाकर) ऐसी कितनी संख्याएँ हैं, जो न तो 3 से और न ही 7 से विभाज्य हैं?

हल:

न तो 3 से विभाज्य और न ही 7 से

= कुल संख्याएँ − (3 या 7 से विभाज्य संख्याएँ)

= कुल − $[N(3)+N(7)-N(21)]$

कुल संख्याएँ 700 से 950 = 251

3 से विभाज्य $= \frac{251}{3} \approx 83$

7 से विभाज्य $= \frac{251}{7} \approx 35$

21से विभाज्य $= \frac{251}{21} \approx 11$

अभीष्ट सख्या

$= 251 - (83 + 35 - 11) = 144$

गुणनखंडन

किसी संख्या का गुणनखंड (factor) एक पूर्ण संख्या होती है, जिसे किसी दूसरी पूर्ण संख्या से गुणा करने पर मूल संख्या प्राप्त होती है। दूसरे शब्दों में, एक गुणनखंड उस संख्या को पूरी तरह से विभाजित कर देता है और कोई शेषफल नहीं बचता।

माना $N = a^p \times b^q \times c^r$

- गुणनखंडों की कुल संख्या= $(p+1)(q+1)(r+1)$
- सम गुणनखंडों की कुल संख्या = $p(q+1)(r+1)$
- विषम गुणनखंडों की कुल संख्या= $(q+1)(r+1)$
- सभी गुणनखंडों का योग $= (a^0 + a^1 + \cdots a^p)(b^0 + b^1 + \cdots b^q)(c^0 + c^1 + \cdots + c^q)$
- सम गुणनखंडों का योग= $(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^p)(b^0 + b^1 + \cdots + b^q)(c^0 + c^1 + \cdots + c^r)$
- विषम गुणनखंडों का योग $= 2^0(b^1 + b^2 + \cdots + b^q)(c^1 + c^2 + \cdots + c^r)$
- गुणनखंडों का औसत= $\frac{\text{गुणनखंडों का योग}}{\text{गुणनखंडों की संख्या}}$
- गुणनखंडों के व्युत्क्रमों का योग $= \frac{\text{गुणनखंडों का योग}}{\text{दी गई संख्या}}$
- अभाज्य गुणनखंडों की संख्या $= p + q + r$
- विशिष्ट अभाज्य गुणनखंडों की संख्या = गुणनखंडों में मौजूद अभाज्य संख्याओं की संख्या
- भाज्य संख्याओं की संख्या = कुल − विशिष्ट अभाज्य संख्याएँ − 1
- प्रत्येक संख्या के धनात्मक और ऋणात्मक गुणनखंड होते हैं
- (अभाज्य संख्या)^2 के रूप वाली सभी संख्याओं के 3 गुणनखंड होते हैं।

Type 11: गुणनखंडों की संख्या ज्ञात करना

उदा: N = 3600 के लिए सभी प्रकार के गुणनखंड और सभी प्रकार के गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: $N = 3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$

- कुल गुणनखंडों की संख्या= $5 \times 3 \times 3 = 45$
- सम गुणनखंडों की संख्या
  $2 \times (1800) = 2(2^3 \times 3^2 \times 5^2)$
  $= 4 \times 3 \times 3 = 36$
- विषम गुणनखंडों की संख्या $= 3 \times 3 = 9$
- अभाज्य गुणनखंडों की संख्या $= 4 + 2 + 2 = 8$
- विशिष्ट अभाज्य गुणनखंडों की संख्या (जो गुणनखंडन में दिखाई देते हैं)= $1 + 1 + 1 = 3$
- भाज्य संख्याओं की संख्या $= 45 - 3 - 1 = 41$
- पूर्ण वर्ग= $(2^2)^2(3^2)^1(5^2)^1$
  $= 3 \times 2 \times 2 = 12$
- पूर्ण घन $= (2^3)^1 = (1 + 1) = 2$
- सभी गुणनखंडों का योग= $(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 12493$
- सम गुणनखंडों का योग $= (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 12090$
- विषम गुणनखंडों का योग= $(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 403$
- अभाज्य गुणनखंडों का योग $= 2 + 3 + 5 = 10$
- भाज्य संख्याओं का योग =
  कुल योग − (अभाज्य गुणनखंडों का योग + 1)
  $= 12493 - 10 - 1 = 12482$
- पूर्ण वर्गों का योग $= (2^0 + 2^2 + 2^4)(3^0 + 3^2)(5^0 + 5^1) = 5460$

उदा: $(4^{11} \times 5^5 \times 3^2 \times 13^2)$ व्यंजक में कुल अभाज्य गुणनखंड की संख्या ज्ञात कीजिए

हल :

$(4^{11} \times 5^5 \times 3^2 \times 13^2) = 2^{22} \times 3^2 \times 5^5 \times 13^2$

अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या

$= 22 + 2 + 5 + 2 = 31$

उदा: $(30^{16} \times 16^{18} \times 20^{21})$ के कितने गुणनखंड ऐसे जो पूर्ण वर्ग होने के साथ साथ पूर्ण घन भी है

हल: $30^{16} \times 16^{18} \times 20^{21} = 2^{130} \times 3^{16} \times 5^{37}$

जब पूर्ण वर्ग या पूर्ण घन की जाँच करने के लिए कहा जाए, तो देखें कि क्या घात (power) 6 का गुणज है।

$$2^{130} \times 3^{16} \times 5^{37} = 2^{126} \times 2^4 \times 3^{12} \times 3^4 \times 5^{36} \times 5^1$$

$$2^{126} \times 2^4 \times 3^{12} \times 3^4 \times 5^{36} \times 5^1 = (2^6)^{21} \times 2^4 \times (3^6)^2 \times 3^4 \times (5^6)^6 \times 5^1$$

उन गुणनखंडों की कुल संख्या जो पूर्ण वर्ग और पूर्ण घन दोनों हैं $= (21+1)(2+1)(6+1) = 462$

उदा: संख्या $2^8 \times 3^6 \times 5^4 \times 10^5$ के कितने गुणनखंड 120 के गुणज है

हल: $N = 2^8 \times 3^6 \times 5^4 \times 10^5 = 2^{13} \times 3^6 \times 5^9$

$$\frac{N}{120} = \frac{2^{13} \times 3^6 \times 5^9}{2^3 \times 3^1 \times 5^1} = 2^{10} \times 3^5 \times 5^8$$

गुणनखंडो की संख्या $= 11 \times 6 \times 9 = 594$

शेषफल

मान कोई संख्या N है, जिसे भाजक D से भाग देने पर शेषफल R और भागफल Q आता है।

$N = D \times Q + R$

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

यदि किसी संख्या a को n से भाग देने पर शेषफल r आता है, तो ka को n से भाग देने पर शेषफल kr आएगा।

यदि संख्याओं a और b को n से भाग देने पर क्रमशः शेषफल r_1 और r_1 आते हैं, तो

$a + b$ को n, से भाग देने पर शेषफल $r_1 + r_2$

$a \times b$ को n, से भाग देने पर शेषफल $r_1 + r_2$

Type 12: शेषफल प्रमेय पर आधारित प्रश्न

उदा: किसी संख्या को 52 से भाग देने पर शेषफल 45 आता है। यदि उसी संख्या को 13 से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: चूंकि 13, 52 का एक गुणज (multiple) है, इसलिए हम सीधे ही पहले वाले शेषफल को नए भाजक से भाग दे सकते हैं।

$$= \frac{45}{13} \Rightarrow R \rightarrow 6$$

उदा: किसी संख्या को 12 से भाग देने पर शेषफल 5 आता है। यदि उस संख्या के वर्ग को 8 से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: जब किसी संख्या पर कोई गणितीय संक्रिया (operation) की जाती है, तो वही संक्रिया उसके शेषफल पर भी की जा सकती है।

$$= \frac{5^2}{8} = \frac{25}{8} \Rightarrow R \rightarrow 1$$

उदा: यदि भाज्य 45 है, भाजक 8 है, और भागफल 5 है, तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल: $N = D \times Q + R$

$45 = 8 \times 5 +$ शेषफल

शेषफल $= 45 - 40 = 5$

Type 13: शेषफल की महत्वपूर्ण अवधारणा

$$\frac{(x+a)^n}{x} \Rightarrow R \rightarrow a^n$$

$$\frac{(x+1)^n}{x} \Rightarrow R \rightarrow 1$$

$$\frac{(x-1)^n}{x} \Rightarrow R \rightarrow (1)^n$$

$R = 1$ जब $n -$ सम हो

$R = -1$ जब $n -$ विषम हो

Special case:

$$\frac{4}{6} \Rightarrow R \rightarrow 4$$

$$\frac{4^n}{6} \Rightarrow R \rightarrow 4$$

उदा: जब 2^{75} को 14 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

हल: $\frac{2^{75}}{15} = \frac{(2^4)^{18}.2^3}{15} = \frac{(16-1)^{18} \times 8}{15} \Rightarrow R \rightarrow 8$

उदा: यदि 2^{192} को 6 से विभाजित किया जाए, तो शेषफल क्या होगा?

हल: अवधारणा का उपयोग करने पर

$$\frac{2^{192}}{6} = \frac{4^{96}}{6} \Rightarrow R \rightarrow 4$$

उदा: जब 37^{47} को 19 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

हल:

$$\frac{37^{47}}{19} = \frac{(38-1)^{47}}{19} \Rightarrow R \to -1$$

शेषफल ऋणात्मक नहीं हो सकता, इसलिए शेषफल को भाजक में से घटाया जाता है।

$R \to -1 \Rightarrow R \to 19 - 1 = 18$

Type 14: फर्मेट लिटिल प्रमेय

यदि $\frac{a^{P-1}}{P}$, $\Rightarrow R \to 1$

Conditions

1. P-अभाज्य संख्या है
2. a, P -सह-अभाज्य संख्या है

उदा: जब 21^{47} को 47 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

हल: 21 और 47 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं, इसलिए हम Fermat's little theorem का उपयोग कर सकते हैं।

$$\frac{21^{47}}{47} = \frac{21^{46} \times 21}{47} \Rightarrow R \to 21$$

Type 15: युलर (टोसेंत) प्रमेय [Euler's (totient) theorem]

$\frac{A^X}{d} \Rightarrow R \to 1$

जहां A और d – सह-अभाज्य

X – d से छोटी और d के सह-अभाज्य संख्याओं की संख्या।

$X = d\left(1 - \frac{1}{P^1}\right)\left(1 - \frac{1}{P^2}\right) \ldots \ldots \ldots$

जहाँ P^1 और P^2, d के भिन्न अभाज्य गुणनखंड हैं।

उदा: यदि φ Euler's totient फलन , तो φ(92) =?.

हल : $92 = 2^2 \times 23$

$$\varphi(92) = 92\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{23}\right) = 44$$

उदा: 7^{82} को 11 से विभाजित किया जाये तो , R=?

हल: 7^{82} को 11 से भाग देने पर शेष राशि ज्ञात करने के लिए, हम फ़र्मेट प्रमेय का उपयोग कर सकते हैं, जो बताता है कि यदि p एक अभाज्य संख्या है और a एक पूर्णांक है जो p से विभाज्य नहीं है, तो

$$\varphi(11) = 11\left(1 - \frac{1}{11}\right) = 10$$

82 को 10 से विभाजित किया जाता है, और शेषफल है

$\frac{7^2}{11} \Rightarrow R \to 5$

Type 16: विलसन प्रमेय

यदि P अभाज्य संख्या हो तो

$\frac{(P-1)!}{P} \Rightarrow R \to P - 1$

$\frac{(P-2)!}{P} \Rightarrow R \to 1$

उदा: जब 568! को 569 से विभाजित किया जाएगा, तो शेषफल क्या होगा?

हल:

$$\frac{568!}{596} = \frac{(569-1)!}{P} \Rightarrow R \to 569 - 1 = 568$$

2 CHAPTER ल.स.प. और म.स.प

LCM - लघुत्तम समापवर्त्य

➢ वह सबसे छोटी संख्या जो दी गई प्रत्येक संख्या से पूरी तरह विभाजित हो जाती है, उसे उन संख्याओं का LCM कहते हैं।

Example:

12 के गुणज – 12,24,36, 48, …

16 के गुणज - 16,32,48,64, …

उभयनिष्ट गुणज – 48, 96…

लघुत्तम समापवर्त्य– 48

HCF - महत्तम समापवर्तक

➢ वह सबसे बड़ी संख्या जो दी गई प्रत्येक संख्या को पूरी तरह विभाजित कर देती है, उसे उन संख्याओं का HCF कहते हैं।

Example

24 के गुणज - 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

36 के गुणज - 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

24 और 36 उभयनिष्ट गुणज - 1, 2, 3, 4, 6, 12

महत्तम समापवर्तक – 12

परीक्षा आधारित महत्वपूर्ण प्रश्न

Type 1: LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) पर आधारित प्रश्न

वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y और z. से पूरी तरह विभाजित हो जाए।

$= \text{LCM}\ (x, y, z)$

1. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे x, y और z से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल 'r' प्राप्त हो।

   $= \text{LCM}\ (x, y, z) + r$

2. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो x, y और z से विभाजित होने पर क्रमशः a, b और c शेषफल देती हो।

   $= \text{LCM of}\ (x, y, z) - k$

   $k = (x - a) = (y - b) = (z - c)$

उदा: वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 5, 6, 7 और 8 से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में 3 शेषफल प्राप्त हो।

हल: सबसे छोटी संख्या $= \text{LCM}\ (x, y, z) + r$

$= \text{LCM}(5,6,7,8) + 3 = 840 + 3 = 843$

उदा: वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 25, 15 और 30 से विभाजित करने पर क्रमशः 21, 11 और 26 शेषफल प्राप्त हों।

हल:

$k = (25 - 21) = (15 - 11) = (30 - 26) = 4$

$= \text{LCM}\ (25,15,30) - 4 = 146$

उदा: जब संख्याएँ 12, 16, 18, 20 और 25 किसी सबसे छोटी संख्या x को विभाजित करती हैं, तो प्रत्येक स्थिति में शेषफल 4 बचता है, लेकिन x, 7 से विभाज्य है। x में हज़ारवें स्थान पर कौन-सा अंक है?

हल:

$\text{LCM} = \text{LCM}\ (12,16,18,20,25) = 3600$

दिया गया है कि 3600, 7 से विभाज्य होना चाहिए।

माना (3600k + 4) 7 से विभाज्य है .

अतः, हम लिख सकते हैं:

$$\frac{3600k + 4}{7}$$

k = 1,2,3,4,5.. रखने पर यदि हम k = 5 रखते हैं, तो यह व्यंजक 7 से विभाज्य हो जाता है।

संख्या $= 3600 \times 5 + 4 = 18004$

में हज़ारवें स्थान पर स्थित अंक 8 है।

Type 2: महत्तम समापवर्तक (HCF) – आधारित प्रश्न

1. वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जो x, y और z से पूरी तरह विभाज्य हो।

   $= \text{HCF}\ (x, y, z)$

2. वह सबसे बड़ी संख्या जो x, y और z को विभाजित कर सके और शेषफल r रहे।

$= \text{HCF } (x, y, z) + r$

यदि r नही दिया गया हो .

$= \text{HCF } |x - y|, |y - z|, |z - x|$

3. वह सबसे बड़ी संख्या जो x, y और z को विभाजित कर सके और क्रमशः a, b, c शेषफल रहे

$= \text{HCF of } (x - a)(y - b)(z - c)$

उदा: यदि $X = 2^3 \times 3^{10} \times 5^1$ और $Y = 2^5 \times 3^1 \times 7^1$, X और Y का HCF ज्ञात कीजिए?

हल: वह सबसे बड़ी संख्या जो दी गई प्रत्येक संख्या को पूरी तरह विभाजित करती है, उन संख्याओं का HCF कहलाती है।

$\text{HCF} = 2^3 \times 3^1$

उदा: वह सबसे बड़ी संभव लंबाई ज्ञात करें जिसका उपयोग करके 7m, 3m 85cm और 12m 95cm की लंबाइयों को पूरी तरह मापा जा सके।

हल:

$= \text{HCF } (700, 385, 1295)$

$= \text{HCF } (x - a)(y - b)(z - c)$

$\text{HCF } (700 - 385)(1295 - 385)(1295 - 700)$

$= \text{HCF } (315)(1225)(595)$

$\text{HCF } (315)(1225)(595) = 35 \text{ cm}$

Type 3 भिन्न का LCM और HCF

$$\text{LCM } \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) = \frac{\text{LCM of } (a, c, e)}{\text{HCF of } (b, d, f)}$$

$$\text{HCF } \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) = \frac{\text{HCF of } (a, c, e)}{\text{LCM of } (b, d, f)}$$

Key point –भिन्न अपने सरलतम रूप में होनी चाहिए।

उदा: 3.6, 1.8 और 0.144 का LCM क्या है?

हल:

$$\frac{36}{10} = \frac{18}{5}, \quad \frac{18}{10} = \frac{9}{5}, \quad \frac{144}{1000} = \frac{18}{125}$$

$$\text{LCM } \left(\frac{18}{5}, \frac{9}{5}, \frac{18}{125}\right) = \frac{\text{LCM } (18, 9, 18)}{\text{HCF } (5, 5, 125)}$$

$$= \frac{18}{5} = 3.6$$

घातों का LCM और HCF

$a^p + 1, \quad a^q + 1$

$\text{LCM } (a^p + 1)(a^q + 1) = a^{\text{LCM } (p,q)} + 1$

$\text{HCF } (a^p + 1)(a^q + 1) = a^{\text{HCF } (p,q)} + 1$

उदा: $(2^{36} - 1)$ और $(2^{45} - 1)$ का HCF ज्ञात कीजिए

हल :

$\text{HCF } (a^p + 1)(a^q + 1) = a^{\text{HCF } (p,q)} + 1$

$\text{HCF } (2^{36} - 1)(2^{45} - 1)$

$= 2^{\text{HCF } (36,45)} + 1 = 2^9 + 1 = 511$

Type 4: LCM और HCF के बीच संबंध पर आधारित प्रश्न

माना 2 संख्याएँ

$N_1 = ha, N_2 = hb \rightarrow$ 'a' और 'b' दोनों सह – अभाज्य $\rightarrow h(a, b) = 1$

$\text{LCM} \times \text{HCF} = N_1 \times N_2$

$\text{LCM} = hab$

योग $= (a + b)h$

अंतर $= (a - b)h$

गुणा $= h^2ab$

$\frac{\text{LCM}}{\text{HCF}} = \frac{ab}{1}$

उदा: दो संख्याएँ 5:7 के अनुपात में हैं। उनके LCM और HCF का गुणनफल 12635 है। तो उन संख्याओं का योग क्या होगा?

हल: माना HCF = x, तो संख्याएँ 5x, 7x

$5x \times 7x = 12635$

$x = 19$

योग $= (a + b)h = (5 + 7)19 = 228$

उदा: दो संख्याओं के LCM और HCF का योग और अंतर क्रमशः 512 और 496 है। यदि एक संख्या 72 है, तो दूसरी संख्या क्या होगी?

हल: माना दूसरी संख्या N_2

$\text{LCM} + \text{HCF} = 512$

$\text{LCM} - \text{HCF} = 496$

समीकरणों को हल करने पर:

$\text{LCM} = 504, \quad \text{HCF} = 8$

$72 \times N_2 = 504 \times 8$

$N_2 = 56$

Type 5: अनुपात पर आधारित LCM और HCF के प्रश्न

उदा: तीन संख्याएँ $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$ के अनुपात में हैं। सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्या के बीच का अंतर 21 है। सभी संख्याओं का योग क्या होगा?

हल:

सबसे बड़ी संख्या $-$ सबसे छोटी संख्या $= 21$

$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4} = 6:8:9$

अब, मान लीजिए अनुपात x है, तो संख्याएँ 6x, 8x और 9x हैं।

$9x - 6x = 21$

$x = 7$

तीनों संख्याओं का योग

$= (6+8+9)\times 7 = 161$

Type 6: घंटियों और ट्रैफिक सिग्नलों पर आधारित प्रश्न

उदा: तीन ट्रैफिक सिग्नल हैं। हर सिग्नल हरे से लाल और फिर लाल से हरे रंग में बदलता है। पहले सिग्नल को हरे से लाल रंग में बदलने में 25 सेकंड, दूसरे सिग्नल को 39 सेकंड और तीसरे सिग्नल को 60 सेकंड लगते हैं। हरे और लाल रंगों की अवधि समान है। दोपहर 2:00 बजे, वे एक साथ हरे हो जाते हैं। अगली बार वे किस समय एक साथ हरे होंगे?

हल: तीनों ट्रैफिक सिग्नल 25 सेकंड, 39 सेकंड और 60 सेकंड के अंतराल पर हरे से लाल होते हैं।

$LCM(25,39,60) = 3900\ sec = 65\ min$

कुल समय $=$ 2 बार $= 65 + 65 = 130\ min$

Time = 4:10 P.M.

उदा: 102m, 119m, 153m और 204m लंबाई की चार रस्सियों को बराबर लंबाई के टुकड़ों में काटा जाना है। हर टुकड़ा जितना संभव हो उतना लंबा होना चाहिए। काटे जा सकने वाले टुकड़ों की अधिकतम संख्या क्या है?

हल:

HCF= वह बराबर लंबाई जिसमें रस्सियों को काटा जा सकता है

$HCF(102,119,153,204) = 17$

कुल भाग $= \frac{102}{17} + \frac{119}{17} + \frac{153}{17} + \frac{204}{17}$

$= 6 + 7 + 9 + 12 = 34$

Type 7: बहुपदों का LCM और HCF

उदा: $(\mathbf{x^8 - y^8})$ और $\left(\mathbf{x^7 - y^7 + x^5y^2 - x^2y^5}\right)$ का HCF ज्ञात कीजिए

हल:

$(x^8 - y^8) = (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

$(x^7 - y^7 + x^5y^2 - x^2y^5)$
$= x^7 + x^5y^2 - y^7 - x^2y^5$

$x^7 + x^5y^2 - y^7 - x^2y^5 = (x^2 + y^2)(x^5 - y^5)$

$(x^2 + y^2)(x^5 - y^5)$
$= (x^2 + y^2)(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

HCF $(x^8 - y^8)(x^7 - y^7 + x^5y^2 - x^2y^5)$
$= (x^2 + y^2)(x - y)$

$HCF = (x^2 + y^2)(x - y)$
$= x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$

3 CHAPTER आयु

परीक्षा आधारित महत्वपूर्ण प्रकार

Type 1: औसत एवं आयु आधारित प्रश्न

उदा: सात सदस्यीय एक टीम में, छह सदस्यों की औसत आयु 42 वर्ष है, जबकि टीम के सातवें सदस्य की आयु, सभी सातों सदस्यों की औसत आयु से 36 वर्ष अधिक है। टीम के सातवें सदस्य की आयु (वर्षों में) ज्ञात कीजिए।

हल: माना 7 सदस्यों की औसत आयु x वर्ष हैं .

कुल आयु = $6 \times 42 + (x + 36) = 7x$

$x = 48$

अत:, 7वें सदस्य की आयु = $48 + 36 = 84$

उदा: किशोर, उनकी पत्नी और उनके बच्चे की औसत आयु छह वर्ष पहले 38 वर्ष थी। उनकी पत्नी और बच्चे की औसत आयु आठ वर्ष पहले 32 वर्ष थी। किशोर की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल: 6 वर्ष पहले आयु

$K + W + C = 38 \times 3 = 114$

वर्तमान आयु = $114 + 6 + 6 + 6 = 132$

8 वर्ष पहले आयु

W+C=64

वर्तमान आयु = $64 + 8 + 8 = 80$

किशोर की आयु (K) = $132 - 80 = 52$ वर्ष

Type 2: अनुपात आधारित

उदा: चार वर्ष पहले A और B की आयु का अनुपात 4:5 था। आठ वर्ष बाद, उनकी आयु का अनुपात 11:13 होगा। उनके वर्तमान आयु का योग ज्ञात कीजिए।

हल:

अंतर = 1 ×2

4 : 5 (नया अनुपात)

11 : 13

अंतर- 2

नया अनुपात

8 : 10

11 : 13

(13-10) = 3 ⟶ 12

1 ⟶ 4

4×18 = 72 (4 वर्ष पहले)

वर्तमान आयु का योग = 72+4+4 = 80

> **Key Point:** अंतर समान होना चाहिए क्योंकि दोनों अनुपातों में परिवर्तन समान है; इसलिए इसे 2 से गुणा किया गया है (ऊपरी अनुपात)।

उदा: वर्तमान में एक पिता और उसके पुत्र की आयु का योग 52 वर्ष है। चार वर्ष बाद, पुत्र की आयु पिता की आयु का एक चौथा हिस्सा होगी। 10 वर्षों बाद पुत्र और पिता की आयु का अनुपात क्या होगा?

हल:

वर्तमान आयु पिता + पुत्र = 52

4 वर्ष पहले आयु का योग

$= 52 + 4 + 4 = 60$

4 वर्ष बाद अनुपात पिता: पुत्र = 4: 1

$= \frac{60}{5} = 12$

4 वर्ष बाद आयु

पिता = 48 पुत्र = 12

वर्तमान आयु

पिता = $48 - 4 = 44$ पुत्र = $12 - 4 = 8$

10 वर्ष बाद आयु

पिता = $44 + 10 = 54$

पुत्र = $8 + 10 = 18$

अनुपात

पिता: पुत्र = $54 : 18 = 3 : 1$

4 CHAPTER औसत

परिभाषा

- दो या दो से अधिक संख्याओं का औसत की इस प्रकार गणना इस प्रकार की जाती है: सभी संख्याओं को जोड़कर, फिर कुल को उन संख्याओं की संख्या से विभाजित किया जाता है।

$$\text{औसत} = \frac{\text{सभी मानो का योग /अवलोकन}}{\text{मानो की संख्या /अवलोकन}}$$

उदा: पाँच दोस्तों का वजन 66 किग्रा, 86 किग्रा, 71 किग्रा, 91 किग्रा और 105 किग्रा है । उनका औसत वजन ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\text{औसत} = \frac{66+86+71+91+105}{5}$$

$$\text{औसत} = \frac{419}{5} = 83.8$$

परीक्षा आधारित महत्वपूर्ण प्रकार

Type 1: जब 'a' जोड़ा, घटाया, गुणा किया या भाग किया जाता है, तो औसत में परिवर्तन।

यदि 'n' संख्याओ का औसत = x

परिवर्तन	**औसत**
यदि 'a' जोड़ा जाये	x + a
यदि 'a' घटाया जाये	x - a
यदि 'a' गुणा किया जाये	a × x
यदि 'a' से भाग किया जाये	$^{x}/_{a}$

उदा: यदि 10 संख्याओं का औसत 92 है। यदि प्रत्येक संख्या में 5 जोड़ा जाए, तो नया औसत क्या होगा?

हल: पुराना औसत = 92

नया औसत = 92+5=97

Type 2: लगातार प्राकतिक संख्याओ का औसत

प्रथम 'n' संख्याओं का योग

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

प्रथम 'n' संख्याओं का औसत

$$= \frac{(n+1)}{2}$$

प्रथम 'n' संख्याओं के वर्गों का योग =

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

प्रथम 'n' संख्याओं के वर्गों का औसत

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

प्रथम n' संख्याओं के घनों का योग

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

प्रथम n' संख्याओं के घनों का औसत

$$= \frac{n(n+1)^2}{4}$$

उदा: प्रथम 47 प्राकृतिक संख्याओं का वर्ग का औसत ज्ञात कीजिए

हल:

$$\text{औसत} = \frac{(47+1)(2\times 47+1)}{6}$$

$$= \frac{48\times 95}{6} = 760$$

Type 3 लगातार सम और विषम संख्याओ का औसत

प्रथम 'n' सम संख्याओ का औसत = $(n+1)$

प्रथम 'n' विषम संख्याओ का औसत = n

उदा: प्रथम 148 सम धनात्मक संख्याओं का औसत और प्रथम 129 विषम धनात्मक संख्याओं का औसत के बीच का अंतर ज्ञात कीजिए?

हल:

प्रथम सम संख्याओ का औसत $= 148 + 1 = 149$

प्रथम विषम संख्याओ का औसत $= 129$

अंतर $= 149 - 129 = 20$

> **Key Points:**
> - लगातार संख्याओं के लिए, सम संख्याएँ और विषम संख्याएँ
>
> **औसत** = मध्य संख्या = पहली और अंतिम संख्या का औसत

उदा: यदि 97 लगातार संख्याओं का औसत 82 है, तो पहले और आखिरी संख्या का योग ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\text{औसत} = \frac{\text{पहली संख्या} + \text{अंतिम संक्या}}{2} = 82$$

योग $= 82 \times 2 = 164$

Type 4 जब आँकड़ो में परिवर्तन किया जाये

यदि प्राकृतिक संख्याओं की एक श्रंखला में सामान्य अंतर 'x' और औसत 'A' है, और यदि श्रृंखला के अंत में 'n' पद जोड़े जाते हैं या श्रृंखला की शुरुआत से 'n' पद हटा दिए जाते हैं, तो औसत में होने वाला परिवर्तन

$$= A + \frac{n \times x}{2}$$

यदि प्राकृतिक संख्याओं की एक श्रंखला में सामान्य अंतर 'x' और औसत 'A' है, और यदि श्रृंखला की शुरुआत में 'n' पद जोड़े जाते हैं या अंत से 'n' पद हटा दिए जाते हैं, तो औसत

$$= A - \frac{n \times x}{2}$$

यदि सम या विषम संख्याओं की एक श्रंखला में औसत 'A' है, और यदि अंत में 'n' पद जोड़े जाते हैं या शुरुआत से 'n' पद हटा दिए जाते हैं, तो औसत में होने वाला परिवर्तन

$= A + n$

यदि सम या विषम संख्याओं की एक श्रंखला में औसत 'A' है, और यदि अंत में 'n' पद हटाये जाते हैं या शुरुआत से 'n' पद जोड़े दिए जाते हैं, तो औसत में होने वाला परिवर्तन

$= A - n$

उदा: 35 लगातार प्राकृतिक संख्याओं का औसत Nहै। पहले 10 संख्याओं को हटाने और अगले 10 संख्याओं को जोड़ने के बाद, औसत Mहो जाता है। यदि $M^2 - N^2 = 600$, तो $3M$और $5N$ का औसत ज्ञात कीजिए।

Sol: प्राकृतिक संख्याओ के अंतर = 1

संख्या हटाने के बाद औसत

$= N + (10/2) = N + 5$

संख्या को जोड़ने के बाद औसत

$= N + (10/2) = N + 5$

कुल परिवर्तन $M = N + 10$

$M - N = 10$

$(M + N)(M - N) = 600$

$M = 35, N = 25$

$$\frac{3M + 5N}{2} = \frac{230}{2} = 115$$

उदा: 20 लगातार सम संख्याओं का औसत 'M' है।

(i) यदि अगली 8 संख्याएँ जोड़ दी जाएं, तो नया औसत क्या होगा?

हल: नया औसत = M + 8

(ii) यदि अंतिम चार संख्याएँ हटा दी जाएं, तो नया औसत क्या होगा?

हल: नया औसत = M – 4

Type 5 समावेशन और बहिष्करण के आधार पर

> *जब नया व्यक्ति जोड़ा जाये*
>
> ***= पुराना औसत ± औसत में परिवर्तन × कुल व्यक्ति (अंतिम में)***
>
> *जब 'n' व्यक्ति जोड़े जाये*
>
> ***= पुराना औसत × n ± औसत में परिवर्तन × कुल व्यक्ति (अंतिम में)***

उदा: चार संख्याओं का औसत 36 है। एक पाँचवी संख्या जोड़ी जाती है, और औसत 40 हो जाता है। पाँचवी संख्या क्या है?

हल:

5वीं संख्या $= 36 + 4 \times 5 = 36 + 20 = 56$