Toppersnotes®
Unleash the topper in you

छत्तीसगढ़

शिक्षक

छत्तीसगढ़ कर्मचारी चयन मण्डल, रायपुर (CGSSB)

भाग - 5

(गणित विषय शिक्षक)

गणित विषय

SIERRA INNOVATIONS

विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
1	संख्या का सामान्य परिचय	1
2	संख्या पद्धति	23
3	लघूत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक	34
4	अनुपात,समानुपात और विचरण	40
5	साधारण ब्याज	44
6	चक्रवृद्धि ब्याज	48
7	प्रतिशत	52
8	लाभ और हानि	57
9	बट्टा और बेईमान दुकानदार	61
10	समय और कार्य	64
11	समय , चाल और दूरी	68
12	औसत	73
13	मिश्रण और पृथक्करण	77
14	बहुपद	82
15	रैखिक समीकरण	89
16	द्विघात समीकरण	94
17	श्रेणी	98
18	त्रिकोणमिति	106
19	त्रिकोणमितीय फलन	116
20	ऊंचाई एवं दूरी	121
21	रेखा एवं कोण	125
22	त्रिभुज	130
23	चतुर्भुज	149

विषयसूची

S No.	Chapter Title	Page No.
24	वृत्त	160
25	क्षेत्रमिति	175
26	सांख्यिकी	184
27	गणित की प्रकृति एवं तर्क शक्ति	210
28	गणित की विशेषताएँ	212
29	पाठ्यक्रम में गणित की महता	213
30	गणित की भाषा	215
31	गणित में मूल्यांकन	217
32	गणितीय शिक्षण की नवीन विधियाँ	219
33	शिक्षण की समस्याएँ	223
34	निदानात्मक एवं उपचारात्मक शिक्षण	224
35	शिक्षण सहायक सामग्री	226
36	मापन एवं मुल्यांकन	228
37	निदानात्मक एवं उपचारात्मक परिक्षण	233
38	निदानात्मक एवं उपचारात्मक शिक्षण	236
39	गणित शिक्षक की शैक्षणिक और व्यावसायिक विशेषताएँ	237
40	गणित में पाठ्यचर्या विकास का सिद्धांत	238
41	भारतीय गणितज्ञ एवं उनके योगदान	241

1 CHAPTER संख्या का सामान्य परिचय

1 करोड़ तक की पूर्ण संख्याएँ :

- हम जानते हैं कि किसी संख्या को लिखने के लिए 10 अंकों का गणित में प्रयोग किया जाता है और ये 10 अंक निम्न प्रकार से हैं - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ।
- **संख्या -** किसी भी संख्या को लिखने के लिए हम दायीं ओर से बायीं ओर से लिखते हैं –

उदाहरण के लिए - 12406892

शब्दों मे – एक करोड़ चौबीस लाख छ: हजार आठ सौ बानवे

दस करोड़	करोड़	दस लाख	लाख	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
1	2	4	0	6	8	9	2

उदाहरण :

28800 का निरूपण :

- अंकों मे - 28800
- शब्दों मे - अठाईस हजार आठ सौ
- विस्तारित रूप – 20000+8000+800+0+0

दस हजार	**हजार**	**सैकड़ा**	**दहाई**	**इकाई**
2	**8**	**8**	**0**	**0**
2 x 10000	8 x 1000	8 x 100	0 x 10	0 x 1
20000	8000	800	0	0

सबसे बड़ी संख्या

सबसे बड़ी संख्या	एक जोड़ने पर प्राप्त संख्या
एक अंक की = 9	9 + 1 = 10 दस
दो अकों की = 99	99 + 1 = 100 एक सौ
तीन अंकों की = 999	999 + 1 = 1000 एक हजार
चार अंकों की = 9999	9999 + 1 = 10,000 दस हजार
पाँच अंकों की = 99999	99999 + 1 = 1,00,000 एक लाख
छः अंकों की = 999999	999999 + 1 = 10,00,000 दस लाख
सात अंकों की = 9999999	9999999 + 1 = 1,00,00,000 एक करोड़

Toppersnotes Unleash the topper in you

एक से एक करोड़ तक की संख्याओं का क्रम निम्नलिखित सारणी के अनुसार होता है

करोड़	लाख		हजार		इकाई		
एक करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
1,00,00,000	10,00,000	1,00,000	10,000	1,000	100	10	1

संख्या पद्धति के प्रकार :

- **देवनागरी संख्या पद्धति :** अपने देश में प्राचीन काल से यह संख्या पद्धति प्रचलित है। इसमें ०, १ , २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ दस अंक हैं। इस संख्या पद्धति में शून्य तथा स्थानीय मान की विशेषता होने से इन दस अंकों के प्रयोग से कोई भी संख्या सरलता से लिख सकते हैं।
- **रोमन संख्या पद्धति :** संख्या लेखन हेतु रोमन संख्या प्रणाली भी प्राचीन काल से प्रचलित है। बहुत सी घड़ियों के डायलों में रोमन संख्या चिह्न देखने को मिलते हैं। रोमन संख्यांकन प्रणाली में सात मूल प्रतीक हैं।

I (एक), **V** (पाँच), **X** (दस), **L** (पचास), **C** (एक सौ), **D** (पाँच सौ),
M (एक हजार)

इन्हीं चिह्नों की सहायता से संख्या लेखन किया जाता है। I, X, C, M की पुनरावृत्ति की जाती है किन्तु किसी भी चिह्न की लगातार तीन से अधिक बार पुनरावृत्ति नहीं की जाती है।

उदाहरण 1: $IX = 10 - 1 = 9$

X (दस) के बायें I (एक) का चिह्न लिखा है अर्थात् दस में से एक कम। अतः IX (नौ) लिखा गया है।

उदाहरण 2: $XI = 10 + 1 = 11$

X (दस) के दायें I (एक) का चिह्न लिखा है अर्थात् दस से एक अधिक। अतः XI (ग्यारह) लिखा गया है।

- **हिन्दू-अरेबिक संख्यांक पद्धति:** इस संख्या पद्धति में 0,1,2,3,4,5,6,7, 8,9 यह कुल दस अंक हैं। इसमें प्रयुक्त **अंकों की उत्पत्ति भारत** में हुई। भारत से अरब होते हुए ये अंक धीरे-धीरे यूरोप पहुंचे। **यूरोपियों ने इन्हें अरबी अंक** कहा क्योंकि उन्हें ये अंक अरबियों से मिले किन्तु स्वयं **अरब के लोगों ने इन्हें हिन्दू अंक** कहा। इस प्रकार यह संख्या पद्धति **हिन्दू अरेबिक संख्या पद्धति** कहलाती है।
  - ✓ **संख्याकों को स्थानीयमान तालिका** में लिखने की प्रणाली की खोज **भारत** में हुई। शून्य की खोज के बारे में ऐतिहासिक तथ्य यह प्रकट करते हैं कि ईसवी सन् के बहुत पहले से भारतीय शून्य के बारे में जानते थे।
  - ✓ शून्य तथा स्थानीयमान इस संख्या पद्धति की विशेषता है।
  - ✓ इनकी सहायता से इस दस अंकों की सहायता से कोई भी संख्या सरलता से लिखी जा सकती है।

देवनागरी संख्या पद्धति	१	२	३	४	५	६	७	८	९
रोमन संख्या पद्धति	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
हिन्दू-अरेबिक संख्या पद्धति	1	2	3	4	5	6	7	8	9

देवनागरी संख्या पद्धति	१०	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०	१००
रोमन संख्या पद्धति	X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	C
हिन्दू अरेबिक संख्या पद्धति	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

देवनागरी संख्या पद्धति	१	५	१०	५०	१००	५००	१०००
रोमन संख्या पद्धति	I	V	X	L	C	D	M
हिन्दू अरेबिक संख्या पद्धति	1	5	10	50	100	500	1000

संख्याओं का निकटम मान :

सामान्यत: तो संख्याओं का प्रस्तुतीकरण या लेखन सही संख्या के माध्यम से करते हैं परंतु कभी कभी हमे वास्तविक संख्या या सही मान न पता होने पे संख्या के लगभग मान का आकलन करते हैं । इस स्थिति मे हम दी गई संख्या का आवश्यकतानुसार दस, सौ या हजार के निकटम कर लेते हैं ।

उदाहरण : संख्या 4256 के निकटतम निकटन कीजिए

यह संख्या 4250 और 4260 के मध्य है।

यह संख्या 4250 की अपेक्षा 4260 के अधिक निकट है। $(4256 - 4250 = 6, 4260 - 4256 = 4)$

अतः 4256 दस के निकटतम निकटन 4260 है।

इसी प्रकार 100 के निकटतम निकटन के लिये 4256 , संख्या 4200 और 4300 के मध्य है

$(4256 - 4200 = 56, 4300 - 4256 = 44)$
अतः यह संख्या 4300 के अधिक निकट है।

इसी संख्या को हजार के निकटतम निकटन देखने के लिये यह संख्या 4000 और 5000 के मध्य है और संख्या 4000 के अधिक निकट है।

$(4256 - 4000 = 256, 5000 - 4256 = 744)$
अतः हम कह सकते हैं कि संख्या 4256 का

दस के निकटतम में मान है $= 4260$

सौ के निकटतम में मान है $= 4300$

हजार के निकटतम में मान है $= 4000$

याद रखने योग्य बातें :

1. यदि इकाई के स्थान का अंक 5 से छोटा है तो हम संख्या का निकटन नीचे की ओर करते हैं इसके लिये दहाई के अंक को ज्यौं का त्यौं लिख कर ईकाई के स्थान पर शून्य लगा देते हैं।
2. यदि ईकाई के स्थान का अंक 5 या 5 से बड़ा है तो दहाई के अंक में एक जोड़कर लिखते हैं तथा ईकाई के स्थान पर शून्य लिखते हैं।
3. इसी प्रकार दहाई के अंक तथा सैकड़े के अंकों के आधार पर दहाई व सैकड़े के अंकों को भी लिखते हैं।

नोट : किसी भी बड़ी संख्या को लिखते समय अलग अलग खंडों के लिए अल्प विराम का प्रयोग करते हैं । अल्प विराम संख्या मे दायें से बाएँ की तरफ लगाते हैं ।

संख्या का स्थानीय मान :

- किसी संख्या मे प्रत्येक स्थान के संगत अंक का मान अलग – अलग होता हैं इसे अंक का स्थानीय मान कहते हैं ।

या

- किसी संख्या का मान जिस स्थान के कारण होता हैं, वह उसका स्थानीय मान कहलाता हैं ।

उदाहरण :

1. संख्या 3477 में दोनों 7 के स्थानीयमान ज्ञात करो।

   हल - $3477 = 3000 + 400 + 70 + 7$

   अतः दाहिनी ओर से

   पहले 7 का स्थानीय मान = 7

   दूसरे 7 का स्थानीय मान = 70

2. 3477 में 3,4,7 अंकों का स्थानीय मान ज्ञात करो।

   दाहिनी ओर से

   पहले 7 का स्थानीय मान = 7

   दूसरे 7 का स्थानीय मान = 70

   4 का स्थानीय मान = 400

   3 का स्थानीय मान = 3000

अंकों का स्थानीय मान :

- इकाई अंक का स्थानीय मान = इकाई का अंक x 1
- दहाई अंक का स्थानीय मान = दहाई का अंक x 10
- सैकड़ा अंक का स्थानीय मान = सैकड़ा का अंक x 100
- हजार अंक का स्थानीय मान = हजार का अंक x 1000

स्थानिक मान की विशेषताएँ

- एक अंकीय संख्या का स्थानिक मान वही होता है जो उसका face value होता है।
- जैसे-जैसे हम बाईं ओर बढ़ते हैं, स्थानिक मान 10 गुना होता जाता है।
- 0 का स्थानिक मान हमेशा 0 ही होता है, चाहे वह कहीं भी हो।
- उदाहरण: 2,345 में 3 (सैंकड़ा) का स्थानिक मान 10 गुना है 4 (दहाई) के स्थानिक मान का।

भारतीय अंकीय प्रणाली (Indian Number System)

उदाहरण: संख्या 31,204 में:

3 → दस हज़ार स्थान पर → 3 × 10,000 = 30,000

1 → हज़ार स्थान पर → 1 × 1,000 = 1,000

2 → सैंकड़ा स्थान पर → 2 × 100 = 200

0 → दहाई स्थान पर → 0 × 10 = 0

4 → इकाई स्थान पर → 4 × 1 = 4

महत्वपूर्ण बात: यदि कोई अंक 0 हो तब भी उसका स्थानिक मान उसकी स्थिति पर निर्भर करता है।

उदाहरण: संख्या 13,10,46,914

चार्ट अनुसार विभाजन:

दस करोड़	एक करोड़	दस लाख	एक लाख	दस हज़ार	हज़ार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
1	3	1	0	4	6	9	1	4

शब्दों में: तेरह करोड़ दस लाख छियालिस हज़ार नौ सौ चौदह।

संरचना:

- पहला वर्ग: इकाई, दहाई, सैंकड़ा
- दूसरा वर्ग: हज़ार, दस हज़ार
- तीसरा वर्ग: लाख, दस लाख
- चौथा वर्ग: करोड़, दस करोड़

दशमलव संख्याएँ भारतीय प्रणाली में

उदाहरण: 45.789 में:

7 → दशांश स्थान → 7 × 0.1 = 0.7

8 → शतांश स्थान → 8 × 0.01 = 0.08

9 → सहस्त्रांश स्थान → 9 × 0.001 = 0.009

अंतर्राष्ट्रीय स्थानिक मान प्रणाली (International Place Value System)

इसमें संख्याएँ अन्तराल या छोटे भाग **(Periods)** में विभाजित होती हैं: ones, thousands, millions।

उदाहरण: 987,654,321

चार्ट:

Hundred Million	Ten Million	Millions	Hundred Thousand	Ten Thousand	Thousands	Hundreds	Tens	Ones
9	8	7	6	5	4	3	2	1

शब्दों में: Nine hundred eighty-seven million, six hundred fifty-four thousand, three hundred twenty-one

विस्तारित रूप में: = (9×100,000,000) + (8×10,000,000) +... + (1×1)

जातीय मान

- किसी भी अंक का अपना शुद्ध मान/वास्तविक मान ही उसका जातीय मान हैं।

  जैसे - 89692 में 8 व 6 का जातीय मान बताइए -

  8 का शुद्ध मान 8 ही है यही उसका जातीय मान है।

  6 का जातीय मान 6 ही है।

स्थानीय मान व जातीय मान में अन्तर -

उदाहरण - संख्या 96259 में 6 के स्थानीय व जातीय मान में अन्तर बताइए।

हल - सबसे पहले तालिका बनाइयें

दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
9	6	2	5	9

6 का स्थानीय मान = 6×1000 = 6000

6 का जातीय मान = 6

अतः 6 के स्थानीय मान व जातीय मान में अन्तर = 6000 - 6 = 5994

स्थानीय मानो का योगफल

उदाहरण - संख्या 106295 में 6, 2, 5 के स्थानीय मान का योगफल क्या होगा ?

हल -

6 का स्थानीय मान = 6×1000 = 6000

2 का स्थानीय मान = 2×100 = 200

5 का स्थानीय मान = 5×1= 5

अतः तीनों के स्थानीय मान का योगफल = 6000 + 200 +5 = 6205

स्थानीय मानों का गुणनफल

Q.1.संख्या 60321045 में 3,4 तथा 5 के स्थानीय मानों का गुणनफल बराबर है।

(a) 60

(b) 900

(c) 60000000

(d) 1200000

Ans. संख्या की तालिका बनाइए।

करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
6	0	3	2	1	0	4	5

3 का स्थानीय मान $= 3 \times 100000 = 300000$

4 का स्थानीय मान $= 4 \times 10 = 40$

5 का स्थानीय मान $= 5 \times 1 = 5$

अतः तीनों का गुणनफल $= 300000 \times 40 \times 5 = 60{,}000{,}000$

दशमलव संख्याओं का स्थानीय मान

हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशमलव	दसवाँ भाग	सौवाँ भाग	हजारवाँ भाग
अंक $\times$ 1000	अंक $\times$ 100	अंक $\times$ 10	अंक $\times$ 1	·	$\frac{1}{10}$	1/100	1/1000

उदाहरण - संख्या 28.329 का स्थानीय मान लिखिए

हल -

दहाई	ड़काई	दशमलव	दसवाँ भाग	सौवाँ भाग	हजाखाँ भाग
2	8	.	3	2	9

2 का स्थानीय मान $= 2 \times 10 = 20$

8 का स्थायी मान $= 8 \times 1 = 8$

3 का स्थायी मान $= 3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

2 का स्थानीय मान $= 2 \times \frac{1}{100} = \frac{2}{100}$

9 का स्थानीय मान $= 9 \times \frac{1}{1000} = \frac{9}{1000}$

उपर्यूक्त उदा. का विस्तारित रूप लिखिए।

उदाहरण - संख्या 28.329 का विस्तारित रूप ?

हल $-20 + 8 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{9}{1000}$

संख्याओं में तुलना

हम संख्याओं की तुलना उनके छोटे, बडे से करते हैं।

यह हम दो प्रकार से करते हैं -

1. **आरोही क्रम -** ड्समें संख्याएँ छोटे से बडे के क्रम में बढ़ती हैं इसे आरोही क्रम कहा जाता हैं।

   उदाहरण - संख्याओं 492, 496, 312, 981

   201. 204. 106. 196 को आरोही क्रम में लिखिए ?

   हल - आरोही क्रम - छोटे से बडा क्रम

   106, 196, 201, 204, 312, 492, 496, 981

2. **अवरोही क्रम -** संख्याएँ ड़समें बडे से छोटे की तरफ बढ़ती जाती हैं। ड़से अवरोही क्रम कहते हैं।

   उदाहरण - संख्याओं 9424, 9892, 9812, 9622, 8922,9629 को अवरोही क्रम में दर्शाड़यें ?

   (a) 9892, 8922, 9629, 9424, 9812, 9622

   (b) 9892, 9812, 9629, 9622, 9424, 8922

   (c) 9892, 9812, 9629, 8922, 9622, 9424

   (d) 9892, 9629, 9812, 9622, 9424, 8922

   हल - (b)

दशमलव संख्याओं का आरोही व अवरोही क्रम

1. उदाहरण - संख्याओ 48.92, 48.62, 49.23 व 48.91 को अवरोही क्रम में लिखिए ?

   हल - 49.23, 48.92, 48.91, 48.62

   हम इस प्रकार के प्रश्नों को हल करते समय दशमलव के पहले वाली संख्या को देखकर व दशमलव के पहले समान संख्या होने पर बाद वाली संख्या को देखकर हल करेंगे।

2. उदाहरण - संख्याओं 191.92, 191.91, 181.68, 191. 99 को अरोही क्रम में लिखिए ?

हल – 181.68, 191.91, 191.92, 191.99

मौलिक अंकगणितीय संक्रियाएँ

- गणितीय संक्रिया से आशय हैं, संख्याओं पर संक्रियाएँ करना जैसे जोड़ना, घटाना, गुणा करना या भाग देना ।
- इन सभी संक्रियाओं को गणित की मूलभूत संक्रिया कहते हैं और इनका उपयोग गणितीय समस्याओं को हल करने के लिए किया जाता हैं ।
- गणित मे, संक्रियाएँ एक प्रक्रिया या कार्य है जो एक या एक से अधिक संख्याओं पर लागू होती हैं ताकि एक परिणाम प्राप्त किया जा सके ।
- इसमें मुख्यतः चार मूलभूत संक्रियाएँ शामिल होती हैं:

1. **योग (Addition)**
2. **घटाव (Subtraction)**
3. **गुणा (Multiplication)**
4. **भाग (Division)**

1. जोड़ (Addition)

परिभाषा:जब दो या दो से अधिक संख्याओं को मिलाया जाता है, तो यह **जोड़** कहलाता है। इसे **'+'** चिन्ह से दर्शाया जाता है।

नियम:

- ✓ यह दशमलव, भिन्न, वास्तविक और सम्मिश्र संख्याओं पर लागू होता है।
- ✓ यदि 0 को किसी संख्या में जोड़ा जाए, तो परिणाम वही संख्या होती है।

उदाहरण: 0 + 7 = 7

- ✓ किसी संख्या और उसके विपरीत (opposite) को जोड़ने पर परिणाम 0 होता है। इसे **विपरीत तत्व (inverse element)** कहते हैं।

उदाहरण: 4 + (–4) = 0

2. घटाव (Subtraction)

परिभाषा:जब किसी संख्या से दूसरी संख्या घटाई जाती है, तो उसे **घटाव** कहते हैं। इसे **'–'** चिन्ह से दर्शाया जाता है।

नियम:

- ✓ यदि लघुतम संख्या को बड़ी संख्या से घटाया जाए, तो उत्तर धनात्मक होगा।
- ✓ यदि बड़ी संख्या को छोटी से घटाया जाए, तो उत्तर ऋणात्मक होगा।

उदाहरण:

8 – 2 = 6

2 – 8 = –6

3. **गुणा (Multiplication)**

परिभाषा:गुणा में दो संख्याओं (गुणक और गुणनखंड) को मिलाकर एक गुणनफल प्राप्त किया जाता है। इसे '×' चिन्ह से दर्शाया जाता है।

नियम:

- ✓ गुणनफल को a × b या a·b के रूप में दर्शाया जाता है।
- ✓ दो धनात्मक संख्याओं का गुणा = धनात्मक
- ✓ दो ऋणात्मक संख्याओं का गुणा = धनात्मक
- ✓ एक धन और एक ऋण संख्या का गुणा = ऋणात्मक

उदाहरण:8 × 4 = 32

4. **भाग (Division)**

परिभाषा:किसी संख्या को समान भागों में बाँटना **भाग** कहलाता है। इसे '÷' चिन्ह से दर्शाया जाता है।

नियम:

- ✓ भाग में, पहली संख्या को भाज्य **(Dividend)** और दूसरी को भाजक **(Divisor)** कहा जाता है।
- ✓ यदि भाज्य **(Dividend)** > भाजक **(Divisor)** हो, तो परिणाम > 1 होगा।

उदाहरण: 6 ÷ 2 = 3

माना किसी संख्या a को b से विभक्त करने पर भागफल q तथा शेषफल r है तब

$$\mathrm{a} = \text{भाज्य}$$
$$\mathrm{b} = \text{भाजक}$$
$$\mathrm{q} = \text{भागफल}$$
$$\mathrm{r} = \text{शेषफल}$$
$$\text{भाज्य} = (\text{भाजक} \times \text{भागफल}) + \text{शेषफल}$$

BODMAS नियम (संक्रियाओं का क्रम)

जब किसी गणितीय प्रश्न में अनेक संक्रियाएँ हों, तो हल करते समय एक निश्चित क्रम अपनाना आवश्यक होता है। इसी क्रम को **BODMAS/PEMDAS** कहते हैं।

1. **BODMAS**

BODMAS का पूर्ण रूप है:

B - Brackets (कोष्ठक)

O - Orders (घातांक, वर्ग, वर्गमूल)

D - Division (भाग)

M - Multiplication (गुणा)

A - Addition (जोड़)

S - Subtraction (घटाव)

उदाहरण: $2 \times 20 \div 2 + (3 + 4) \times 3^2 - 6 + 15$

Step 1: कोष्ठक हल करें: $= 2 \times 20 \div 2 + 7 \times 3^2 - 6 + 15$

Step 2: घात हल करें: $= 2 \times 20 \div 2 + 7 \times 9 - 6 + 15$

Step 3: गुणा और भाग बाएँ से दाएँ: $= 40 \div 2 + 63 - 6 + 15 = 20 + 63 - 6 + 15$

Step 4: जोड़ और घटाव: $= 92$

2. **PEMDAS**

PEMDAS का पूर्ण रूप है:

P - Parentheses (कोष्ठक)

E - Exponents (घात)

M - Multiplication

D - Division

A - Addition

S - Subtraction

उदाहरण:$(4 \times 3 \div 6 + 1) \times 3^2$

$= (12 \div 6 + 1) \times 9$

$= (2 + 1) \times 9$

$= 3 \times 9 = \mathbf{27}$

<u>योग करने की अन्य प्रक्रियाएँ</u>

1. **प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग** $= \frac{n(n+1)}{2}$

जहाँ n प्राकृत संख्याओं की संख्या है।

उदाहरण -1 से 25 तक की प्राकृत संख्याओं का योग?

हल -1 से 25 तक की प्राकृत संख्याओं का योग

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n = 25$$

$$\Rightarrow = \frac{25(25+1)}{2} = \frac{25 \times 26}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{650}{2} = 325$$

अतः 1 से 25 तक की प्राकृत संख्याओं का कुल योग $= 325$ है।

2. **प्रथम n सम संख्याओं का योग** $= \boldsymbol{n(n+1)}$

उदाहरण - प्रथम 25 सम संख्याओं का योग कीजिए।

हल - प्रथम 25 सम संख्याओं का योग $= 25(25+1)$

$$= 25 \times 26$$
$$= 650$$

अतः प्रथम 25 सम संख्या का योग $= 650$ है।

3. प्रथम n विषम संख्याओं का योग बताओ = n^2

उदाहरण

(i) प्रथम 20 विषम संख्याओं का योग बताओ।

हल - प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

प्रथम 20 विषम संख्याओं का योग = $(20)^2 = 400$

(ii)1 से 100 तक विषम संख्याओं का योग कितना होगा?

हल - आप जानते है कि 1 से 100 तक लगभग 60 विषम संख्याऐं होती है।

अतः प्रथम 60 विषम संख्याओं का योग ज्ञात करने पर -

सुत्र = प्रथम n विषम संख्या का योग = n^2

$$= (50)^2$$
$$= 2500$$

अतः प्रथम 50 विषम संख्याओं का योग = 2500 होगा।

4. प्रथम 20 पूर्ण संख्याओं का योग = $\frac{n(n-1)}{2}$

उदाहरण - प्रथम 20 पूर्ण संख्याओं का योग कितना होगा ?

हल - हमे जानते है कि पूर्ण संख्याएँ शून्य से प्रारम्भ होती है।

पूर्ण संख्याएँ = 0,1,2,3,4,

प्रथम 20 पूर्ण संख्याओं का योग = $\frac{n(n-1)}{2}$

$$= \frac{20(20-1)}{2} = \frac{20 \times 19}{2}$$
$$= \frac{380}{2}$$
$$= 190$$

अत्तः प्रथम 20 पूर्ण संख्याओं का योग = 380 होगा।

5. प्रथम n प्राकृत्त संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

उदाहरण - प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग बताओ।

हल - प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं के वर्गा का योग

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 \dots\dots.. +10^2$$
$$= \frac{10(10+1)(2 \times 10 + 1)}{6}$$
$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$
$$= 385$$

महत्वपूर्ण प्रश्न :

1. पाँच अंको की सबसे बड़ी संख्या में से चार अंको की सबसे छोटी संख्या का अन्तर कितना होगा?

हल - सर्वप्रथम हम पाँच अंको की सबसे बड़ी संख्या - चार अंको की सबसे छोटी संख्या

पांच अंको की सबसे बड़ी संख्या = 99.999

चार अंको की सबसे छोटी संख्या = 1000

अतः

$$\begin{array}{r} 99999 \\ -\,1000 \\ \hline 98999 \\ \hline \end{array}$$

अतः इन संख्याओं का अन्तर = 98999

2. राजू के पास 632.75 रुपये है। वह बाजार से 182.28 रुपये का सामान लाता है। अब उसके पास कुल कितने रुपये है?

हल - राजू के पास कुल रूपये = 632.75 रु

राजू ने सामान खरीदा = 182.28 रु

	रु			
6	3	2	पैसे	
-1	8	2	2	5
4	5	0	4	7

अतः राजू के पास शेष रुपये है - 450.47 ₹.

3. राम ने बाजार से 9 किग्रा. 500 ग्राम चीनी खरीदी और राधा ने 7 किग्रा 875 ग्राम चीनी खरीदी तो बताओ राम ने कितनी अधिक चीनी खरीदी।

हल -

	किग्रा	ग्राम
राम ने बाजार से चीनी खरीदी →	9	500
राधा ने बाजार से चीनी खरीदी →	7	875

✓ 1 किग्रा. = 1000 ग्राम

किग्रा.	ग्राम
9	500
- 7	875
1	652

अतः राम ने 1 किग्रा 625 ग्राम अधिक चीनी खरीदी।

Toppers Notes Unleash the topper in you

4. एक सेल फोन का मूल्य $434\frac{2}{3}$ रु. है तो 14 सेल फोन का मूल्य कितना होगा?

हल - एक सेल फोन का मूल्य $= 434\frac{2}{3}$ रु. 14 सेल फोन का मूल्य

$$= 434\frac{2}{3} \times 14$$
$$= \frac{1304}{3} \times 14$$
$$= \frac{18256}{3}$$
$$= 6085\frac{1}{3}$$

अतः 14 सेल फोन का मूल्य $= 6085\frac{1}{3}$ रुपये होगा।

योज्य तत्समक

- x का योज्य तत्समक $= 0$
- $x + 0 = x$

योज्य प्रतिलोम

- x का योज्य प्रतिलोम $= -x$
- $x + (-x) = 0$

उदाहरण - 4 का योज्य प्रतिलोम क्या होगा?

हल -4 का योज्य प्रतिलोम $= -4$

$= 4 + (-4) = 0$

गुणन तत्समक

- x का गुणन तत्समक $= 1$
- $x \times 1 = x$

गुणन प्रतिलोम

- x का गुणन प्रतिलोम $= \frac{1}{x}$
- $x \times \frac{1}{x} = 1$

उदाहरण -

(i) 3 का गुणन प्रतिलोम बताओ?

हल -3 का गुणन प्रतिलोम $= 3 \times \frac{1}{3} = 1$

(ii) $\frac{5}{7}$ का गुणन प्रतिलोम बताओ?

हल $-\frac{5}{7}$ का गुणन प्रतिलोम $= \frac{5}{7} \times \frac{7}{5} = 1$

विभाज्यता के नियम :

किसी संख्या में भाग देने के लिए भी कुछ नियम होते है। उन्हें ही भाजकता नियम कहते है। इनसे शीघ्र पता चल जाता है कि भाग जाएगा या नही।

- **2 का भाजकता नियम :** जिस संख्या के अन्त मे 0,2,4,6,8 अंक हो
- **3 से भाजक नियम :** जिस संख्या के सभी अंको का योग 3 से विभाजित होता-

  उदा. 38922

  इसमे $3 + 8 + 9 + 2 + 2 = 24$

  अतः यह संख्या 3 से पूर्णतः विभाजित है।
- **4 से भाजकता नियम :** जिस संख्या के अन्तिम दो अंक इकाई अंक व दहाई अंक दोनो मे पूर्णत: भाग चला जाए तो

  उदा. (1) 42984

  इस संख्या के 84 मे भाग जाएगा तो सम्पूर्ण संख्या मे भाग चला जाएगा।
- **5 से भाजकता नियम :** जिस संख्या का अन्त में इकाई अंक 0,5 तो वह 5 से पूर्णत: विभाजित होगी।

  उदा. (1) 9240

  इस संख्या के अन्त में 0 है इसलिए यह 5 से पूरी तरह विभाजित होगी।

  Note -15 का विभाजकता नियम इसी तरह से होगा।
- **6 का भाजकता -** जिस संख्या मे 2 या 3 का भाग भी पूरा-पूरा चला जाए तो उस संख्या 6 का भाग भी चला जाएगा।

  उदा. (1) 48 इसमे 2 व 3 का पूरा भाग जाता है इसलिए इसमे 6 का भाग भी पूरा-पूरा जाएगा।
- **7 का भाजकता नियम :** किसी संख्या में 7 का पूरा पूरा भाग जाएगा।

  जिसके लिए हमें संख्या के अंक को दुगना कर शेष बची संख्या मे से घटाना है। यह प्रकिया कई बार भी करनी पड़ सकती है।

  उदा. (1) 2961

  इस संख्या का इकाई अंक 1 है और इसका दोगुना कर शेष बची संख्या मे से घटाना होगा।

  $\Rightarrow$ 2961 का इकाई अंक $1 \times 2 = 2$

$$\Rightarrow 296 - 2 = 294 \rightarrow 4 \times 2 = 8$$
$$\Rightarrow 29 - 8 = 21$$

  $\Rightarrow$ 21 से पुरी विभाजित है। अतः यह संख्या भी पूर्णतः विभाजित है।

  Note- यदि कोई संख्या लगातार 6 बार आ जाए तो वह संख्या भी 7 से पूर्णतः विभाजित होगी।

  उदा. (1) 2222222

  (2) 999999
- **13 का भाजकता नियम -** इसमें इकाई के अंक का चार गुना करके शेष संख्या मे जोडते है।

  उदा. (1) 6357

  यहों $635 + 7 \times 4 = 635 + 28 = 663$

$$660 + 3 \times 4 = 66 + 12 = 78$$

  अतः 78 मे 13 का भाग पूर्णतः विभाजित है।

- **8 का भाजकता :** जिस संख्या के अन्त के तीन अंकों मे 8 का भाग चला जाए तो उस पूरी संख्या मे 8 का भाग जाएगा। जिसके अन्त के इकाई, दहाई, सैकड़ा के अंक लेने है।

  उदा. (1) 5432 संख्या 432 मे यदि 8 का भाग पूरा-पूरा चला जाए तो यह संख्या 8 से पूर्णतः विभाजित होगी।
- **9 का भाजकता नियम :** जिस संख्या के अंको का योग करने पर उस संख्या मे 9 का भाग चला जाए तो वह 9 से पूर्णत: विभाजित है।

  उदा. (1) 8073 में अंकों का योग

  $8 + 0 + 7 + 3 = 18$
  18 मे 9 का भाग जाता है इसलिए इस पूरी संख्या 8073 में भी जाएगा।
- **10 का भाजकता नियम :** जिस संख्या के अंत में 0 हो तो

  उदा. (1) 100 , (2) 1000 (3) 590
- **11 का भाजकता नियम :** जिस भी संख्या में सम स्थान पर अंक और विषम स्थान पर अंक का अन्तर 0 या 11 के पहाड़े में से आये तो वह संख्या 11 से पूर्णतः विभाजित होगी।

  उदा. (1) 2893

  यहा संख्या के सम स्थान पर अंक - विषम स्थान पर अंक =

  = (8+3)-(2+9)

  = 11 – 11 = 0

  यहा 0 आने पर यह संख्या 11 से पूर्णतः विभाजित है।

  (2) 76,824 संख्या 11 से पूर्णतः विभाजित है या नही?
- **17 का विभाजकता नियम -** इसमे संख्या के इकाई अंक को पाँच गुना करके शेष में से घटाते है और अन्त मे जो बची संख्या मे 17 का भाग जाएगा तो वह 17 से पूर्णतः विभाजित होगी।

भारतीय मुद्रा

- **मुद्रा (Currency)** वह स्वीकार्य माध्यम है जिससे किसी अर्थव्यवस्था में वस्तु और सेवाएँ खरीदी-बिक्री होती हैं।
- **मुद्रा के मुख्य कार्य:**
  - ✓ **विनिमय का माध्यम (Medium of exchange)** — लेन-देन सरल बनाना।
  - ✓ **मूल्य की इकाई (Unit of account)** — वस्तुओं/सेवाओं के दाम नापना।
  - ✓ **मूल्य का भंडार (Store of value)** — भविष्य में उपयोग के लिए धन संग्रहीत करना।
  - ✓ **आवधि-सम्बन्धी भुगतान का मानदण्ड (Standard of deferred payments)** — कर्ज़ व ऋण के भुगतान का आधार।
- भारतीय मुद्रा, एक आधिकारिक माध्यम हैं जिसके द्वारा भारत देश के अंदर वस्तुओं और सेवाओं का मूल्य चुकाया जाता हैं ।
  - ✓ भारतीय मुद्रा की मूल इकाई **"रुपया" (₹)** है।
  - ✓ 1 रुपया = 100 पैसे (हालांकि छोटे मूल्य के सिक्कों का प्रयोग अब बहुत कम होता है) ।
  - ✓ इसे **भारतीय रिज़र्व बैंक (RBI)** जारी करता है और इसका विनियमन भी RBI ही करता है।
  - ✓ भारतीय मुद्रा में **सिक्के** और **नोट** दोनों शामिल होते हैं।

- **'रुपया' शब्द की उत्पत्ति**
  - ✓ 'रुपया' शब्द संस्कृत के **"रूप्यकम"** से आया है, जिसका अर्थ है **चाँदी का सिक्का**।
  - ✓ इसकी शुरुआत शेरशाह सूरी के शासनकाल (1540–1545 ई.) में हुई, जब उन्होंने 178 ग्रेन (लगभग 11.53 ग्राम) वज़न का **चाँदी का रुपया** जारी किया।

भारतीय मुद्रा का इतिहास :

- **वैदिक काल (1500 ईसा पूर्व से 600 ईसा पूर्व)**
  - ✓ इस समय कोई सिक्के या नोट्स नहीं थे
  - ✓ यहाँ के लोग वस्तु विनिमय प्रणाली का प्रयोग करते थे ।
  - ✓ वस्तु विनिमय प्रणाली - एक वस्तु के बदले दूसरी वस्तु दी जाती थी ।
  - ✓ जैसे - अनाज के बदले कपड़े, दूध के बदले नमक ।

वैदिक साहित्य से साक्ष्य

- विद्वान **थॉमस** और **भण्डारकर** के अनुसार मुद्रा का प्रारंभ भारत में **वैदिक काल** से माना जा सकता है।
- वैदिक साहित्य में **मुद्रावाची शब्द** मिलते हैं।
- **'हिरण्य'** शब्द - मूल्यवान धातु-खंड के लिए प्रयुक्त (स्वर्ण और रजत दोनों)।
  - ✓ ऋग्वेद में वर्णन:
    - एक ऋषि ने दिवोदास को **10 अश्व, 10 कोश, 10 बहुमूल्य वस्त्र**, और **10 हिरण्य पिंड** भेंट किए।
  - ✓ हिरण्य के प्रकार:
    - **हरित हिरण्य** - स्वर्ण
    - **रजत हिरण्य** - चाँदी
    - **हिरण्य बिन्दु** - मोती
- **पाणिनि की अष्टाध्यायी** - धन के निश्चित परिमाण को 'हिरण्य' कहा गया है।
- ऋग्वेद में धन के रूप में गाय, अश्व और **चन्द्रवत** (चाँदी) का उल्लेख मिलता है।
- 'चाँदी' नाम संभवतः उसके **चन्द्रमा के समान धवल रंग** के कारण पड़ा।

अन्य महत्वपूर्ण बिन्दु

- **भारतीय मुद्राशास्त्र** के **जनक जेम्स प्रिंसेप** हैं। **मुद्रा के अध्ययन** को **मुद्राशास्त्र (Numismatics)** कहा जाता है।
- **सिक्का (Coins)-** भारतीय साहित्यिक विवरणों में इन धातुखण्डों को **'आहत'** नाम दिया गया है। आहत सिक्कों को **पंचमार्क सिक्के** भी कहा जाता है क्योंकि इसमें **पांच प्रकार के चिन्ह** पाये जाते हैं। ये सिक्के **रजत एवं ताम्र निर्मित** होते थे।
- **स्वर्ण निर्मित धातुखण्ड** (आहत मुद्रा) अभी तक प्राप्त नहीं हो सका है। स्वर्ण निर्मित धातुखण्डों का उल्लेख केवल साहित्यिक **विवरणों (ऋग्वेद)** में प्राप्त होता है। ऋग्वेद में इन धातु खण्डों को **निष्क और सूवर्ण** कहते थे।

Toppersnotes Unleash the topper in you

- ➢ मनुस्मृति में इन सिक्कों को धरण (निश्चित वजन धारण करते थे) एवं पुराण (पुराना) कहा गया है।
- ➢ **धातु एवं सिक्कों के नाम :**
  - a. स्वर्ण - निष्क या सुवर्ण
  - b. रजत - कार्षापण, शतमान, शाण (शतमान का 1/8 वां हिस्सा)
  - c. ताम्र - माष, काकणी, विंशतिक

- ➢ **महाजनपद काल (600 ईसा पूर्व से 321 ईसा पूर्व)**
  - ✓ इस काल मे भारत मे सिक्कों की शुरुआत हुई जिसे पंचमार्क सिक्के कहा जाता था ।
  - ✓ पंचमार्क सिक्के - चांदी और तांबे के सिक्के होते थे । जिनके ऊपर और नीचे छोटे छोटे प्रतीक उकेरे जाते थे । ये चिन्ह हाथी, सूर्य, पहिया या ज्यामितीय चिन्ह होते थे ।
  - ✓ सिक्कों का आकार और वजन समान नहीं होता था ।
- ➢ **मौर्य काल (321 ईसा पूर्व से 185 ईसा पूर्व)**
  - ✓ मौर्य काल मे चांदी के पंचमार्क सिक्के का व्यापक उपयोग किया ।
  - ✓ इन सिक्कों मे राजा का नाम या चेहरा नहीं होता था ।
- ➢ **गुप्तकाल (320 ईसा पूर्व से 550 ईसा पूर्व)**
  - ✓ इस काल मे सोने के सिक्के (दीनार) का उपयोग किया जाने लगा ।
  - ✓ सिक्कों पर गुप्त सम्राट की छवि या हिन्दू धर्म के प्रतीक होते थे ।
- ➢ **मुस्लिम काल (12 शताब्दी से 16 शताब्दी)**
  - ✓ **दिल्ली सल्तनत**
    - ▪ चांदी का टंका और ताबे का सिक्का जीतल नाम के सिक्के चलन मे थे ।
    - ▪ सिक्कों पर अरबी और फारसी भाषा मे चिन्ह बनाए गए ।
  - ✓ **मुगल साम्राज्य :**
    - ▪ सर्वप्रथम रुपया सिक्का शेरशाह सूरी ने 1540 ई मे चलाया गया यह सिक्का चांदी का बना था और इसका वजन 178 दाने (लगभग 11.66 ग्राम) था ।
    - ▪ शेरशाह सूरी के इस रुपये को मुगल बादशाह अकबर द्वारा भी बढ़ावा मिला ।
    - ▪ अकबर ने अपने सोने के सिक्कों मे " खुदा का बंदा " लिखवाया था, जिससे उसकी यह मुद्रा विदेशों मे भी सम्मानित थी ।
    - ▪ सोने का **मोहर** एवं तांबे का दम भी चलन मे था ।
    - ▪ मुगल काल के सिक्कों पर सम्राटों की छवि और फारसी भाषा मे लिखावट होती थी ।
- ➢ **ब्रिटिश काल (18 वीं शताब्दी से 1947 तक):**
  - ✓ ब्रिटिश शासन मे भारतीय मुद्रा प्रणाली का रूप बदल गया । **सन 1835 से भारत मे एकीकृत मुद्रा प्रणाली** लागू की गई ।
  - ✓ सन 1861 मे भारत मे पहली बार कागज के नोट्स की शुरुआत हुई । सबसे पहले 10 रुपये और 100 रुपये के नोट्स छापे गए थे ।