Toppersnotes®
Unleash the topper in you

UP – TGT

प्रशिक्षित स्नातक शिक्षक

गणित

भाग - 3

SIERRA INNOVATIONS

विषय सूची

क्र.सं.	अध्याय	पृष्ठ सं.
1.	**त्रिकोणमितीय फलन एवं सर्वसमिकाएँ**	
	➢ त्रिकोणमितीय फलन एवं सर्वसमिकाएँ	1
	➢ कोण का मापन (Measurement of Angles)	1
	➢ अपवर्त्य तबा अपवर्तक कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios for Multiple and Submultiple Angles)	11
	➢ प्रतिबम्भित सर्वसमिकाएँ (Conditional Identities)	12
	➢ त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometrical Equations)	15
	➢ प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse Trigonometrical Functions)	19
	➢ प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्म (Properties of inverse Trigonometrical Functions) :- गुणधर्म (Property)	23
	➢ ऊँचाई और दूरी (Heights and Distances)	27
2.	**निर्देशांक ज्यामिति**	
	➢ निर्देशांक ज्यामिति	37
	➢ द्विघात का व्यापक समीकरण : शांकवों का अनुरेखण (General Equation of Second Degree : Tracing of Conics)	50
	➢ शांकव परिच्छेद (Conic Section)	50
	➢ गोला (Sphere)	62
	➢ शंकु	66
	➢ बेलन (Cylinder)	75
3.	**ज्यामिति (Geometry)**	
	➢ ज्यामिति (Geometry)	88
	➢ स्थिति-वार प्रमेय एवं महत्वपूर्ण सूत्र (Types & Formulas)	94
	➢ रेखीय समतल आकृतियों की समरूपता (Similarity of Linear Plane Figures)	95
4.	**सदिश कलन (Vector Calculus)**	
	➢ सदिश कलन (Vector Calculus)	107
	➢ सदिश अवकल संकारक (Vector differential Operator) ∇	111
	➢ दिशावकलज (दिक्अवकलज) (Directional Derivatives)	117
	➢ स्पर्श तल तथा अभिलम्ब (Tangent Plane and Normal)	119
	➢ स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब समतल (Tangent Plane and Normal Plane)	120
	➢ सदिशों का समाकलन (Integration of Vectors)	122
	➢ रेखा, पृष्ठ और आयतन समाकलन (Line, Surface and Volume Integrals)	124
	➢ आयतन समाकल (Volume Integrals)	127
	➢ गॉस, स्टोक्स तथा ग्रीन की प्रमेय तथा इनके साधारण प्रयोग (Gauss's Stoke's and Green's Theorems with their Simple Applications)	128
	➢ ग्रीन की प्रमेय का कथन (Green's Theorem Statement)	130

5.	**स्थैतिक विज्ञान (Statics)**	
	➢ परिभाषाएँ, समतलीय बलों का संयोजन एवं वियोजन (Definitions, composition and Resolution of Coplanar Forces)	140
	➢ बल (Force)	141
	➢ एक बिन्दु पर क्रियाशील बलों का संतुलन (Equilibrium of Forces acting at a Point)	153
	➢ समान्तर बल तथा आघूर्ण (Parallel Forces and Moments)	159
	➢ आघूर्ण (Moments)	161
6.	**गति विज्ञान (Dynamics)**	
	➢ मूल संकल्पनाएँ, शुद्ध गतिकी तथा गतिकी (Basic Concepts, Kinematics and Kinetics)	168
	➢ शुद्ध गतिकी (Kinematics)	170
	➢ एक ततीय गति (Uniplaner Motion)	171
	➢ अरीय एवं अनुप्रस्थ वेग व त्वरण (Radial and Transverse Velocities and Accelerations)	174
	➢ प्रक्षेप्य (Projectiles)	178
7.	**लाभ एवं हानि**	
	➢ लाभ एवं हानि	193
	➢ अंकित मूल्य एवं छूट (Marked Price and Discount)	193
	➢ कार्य एवं समय (Work and Time)	194
	➢ चाल, समय एवं दूरी (Speed, Time and Distance)	195
	➢ चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)	197
	➢ बैंकिंग (Banking)	198
	➢ कराधान (Taxation)	199
	➢ GST (Goods and Services Tax)	199

1

CHAPTER

त्रिकोणमितीय फलन एवं सर्वसमिकाएँ

त्रिकोणमितीय फलन एवं सर्वसमिकाएँ

परिचय (Introduction)

शब्द "त्रिकोणमिति" दो शब्दों 'त्रिकोण' तथा 'मिति' से मिलकर बना है।

त्रिकोण का अर्थ त्रिभुज तथा 'मिति' का अर्थ 'मापन' होता है।

अतः त्रिकोणमिति का अर्थ त्रिभुज का मापन होता है।

कोण का मापन (Measurement of Angles)

कोण का अर्थ (Sense of an Angle)

एक रेखा OA को लेने पर यदि रेखा OA का अन्त-बिन्दु O के सापेक्ष घूमकर स्थिति OB में आती है, तो कोण ∠AOB उत्पन्न होता है। बिन्दु O स्थिर रहता है तथा रेखा OA घूमती है, उसे कोण का शीर्ष कहते हैं।

यदि घूर्णन की दिशा वामावर्त (Anti-clockwise) हो तो कोण धनात्मक (Positive) कहलाता है तथा यदि दिशा दक्षिणावर्त (Clockwise) हो तो कोण ऋणात्मक कहलाता है।

समकोण (Right Angle)

जब दो रेखाएँ OA एवं OB बिन्दु O पर इस प्रकार मिलती हैं कि इनके द्वारा बना प्रत्येक कोण बराबर हो, तो प्रत्येक कोण समकोण कहलाता है।

अचर राशि π (Constant π)

वृत्त की परिधि तथा उसके व्यास का अनुपात सदैव अचर रहता है, जिसे **π** से व्यक्त करते हैं।

$$\pi = \frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{वृत्त का व्यास}}$$

- **π** एक अपरिमेय संख्या है, जिसका मान लगभग 3.1415 होता है।

  $\frac{1}{\pi}$ = 0.3183098862...

कोण मापन की पद्धतियाँ (Systems of Measurement of an Angle)

कोण मापन की मुख्यतः तीन पद्धतियाँ हैं—

1. **षष्टांश या ब्रिटिश पद्धति (Sexagesimal or English System)**

   समकोण = 90° (90 अंश)

   1° = 60′ (60 मिनट)   1′ = 60″ (60 सेकण्ड)

2. **सांटेसिमल पद्धति (Centesimal System)**

   इस पद्धति में कोण की इकाई ग्रेड होती है।

   समकोण = 100 ग्रेड (=100g)

   1 ग्रेड = 100 मिनट (=100′)

   1 मिनट = 100 सेकण्ड (=100″)

3. वृतीय पद्धति (Circular System)

इस पद्धति में कोण की इकाई रेडियन होती है।

1 रेडियन = $\frac{180^{\circ}}{\pi}$ = $57°17'45''$

$1° = \pi/180$ रेडियन

विशिष्ट बिन्दु

मान लीजिए किसी कोण **θ** में अंशों की संख्या D, रेडियनों की संख्या R तथा ग्रेडों की संख्या G है, तब तीनों पद्धतियों के मध्य निम्नलिखित सम्बन्ध होता है—

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi}$$

उदाहरण 1

$45°15'30''$ को डिग्री में परिवर्तित कीजिए।

हल:

$$1' = \frac{1°}{60}$$
$$30'' = \frac{30°}{3600}$$
$$= \frac{1°}{120}$$

अत: $45°15'30''$

$$= 45 + \frac{15}{60} + \frac{1}{120}$$
$$= 45 + \frac{30}{120} + \frac{1}{120}$$
$$= 45 + \frac{31}{120}$$
$$= \frac{5400 + 31}{120}$$
$$= \frac{5431°}{120}$$

उदाहरण 2

5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जो केन्द्र पर 15° का कोण अन्तरित करता है।

हल :

वृतीय पद्धति में,

$$s = r\theta$$

जहाँ,

$$r = 5 \text{ सेमी}$$

θ = 15°

$$= 15 \times \frac{\pi}{180}$$
$$= \frac{\pi}{12} \text{ रेडियन}$$

अत:

$$s = r\theta$$
$$= 5 \times \frac{\pi}{12}$$
$$= \frac{5\pi}{12} \text{ सेमी}$$

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios) →

मान लीजिए समकोण △OMP में आधार OM = x, लम्ब PM = y तथा कर्ण OP = r हैं, तोY

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{y}{r}$$

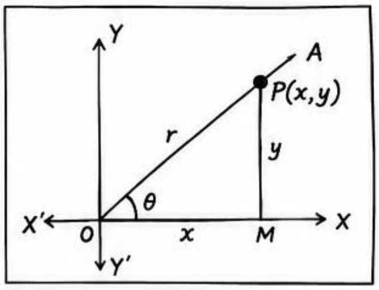
$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{y}{x}$$

$$\text{cosec}\theta = \frac{\text{कण}}{\text{लम्ब}} = \frac{r}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कण}}{\text{आधार}} = \frac{r}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{x}{y}$$



स्पष्ट है कि उपर्युक्त राशियाँ केवल θ का फलन हैं। ये राशियाँ बिन्दु P के चुनाव पर निर्भर नहीं करती हैं।

त्रिकोणमितीय फलनों के प्रान्त्य एवं परिसर (Domain and Range of Trigonometrical Functions) →

त्रिकोणमितीय फलन	sin θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	cosec θ
प्रान्त्य	R	R	$R - \left\{(2n+1), \frac{\pi}{2}\ n \in Z\right\}$	$R - \{n, \pi\ n \in Z\}$	$R - \left\{(2n+1), \frac{\pi}{2}\ n \in Z\right\}$	$R - \{n, \pi\ n \in Z\}$
परिसर	$[-,11]$	$[-,11]$	R	R	$R - \{-,11\}$	$R - \{-,11\}$

त्रिकोणमितीय अनुपातों के मध्य सम्बन्ध (Relations between Trigonometrical Ratios)

	sin θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	cosec θ
sin θ	1	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$
cos θ	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	1	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}{\text{cosec}\,\theta}$
tan θ	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	1	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}$
cot θ	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	1	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}$
sec θ	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	1	$\frac{\text{cosec}\,\theta}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}$
cosec θ	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	1

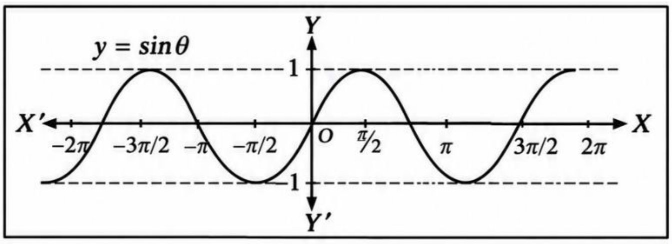
कुछ ज्ञात कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान (Trigonometrical Ratios for some known Angles):

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
sin θ	0	1/2	1/√2	√3/2	1	0	−1	0
cos θ	1	√3/2	1/√2	1/2	0	−1	0	1
tan θ	0	1/√3	1	√3	∞	0	∞	0

विभिन्न त्रिकोणमितीय अनुपातों के ग्राफ (Graph of Different Trigonometrical Ratios):

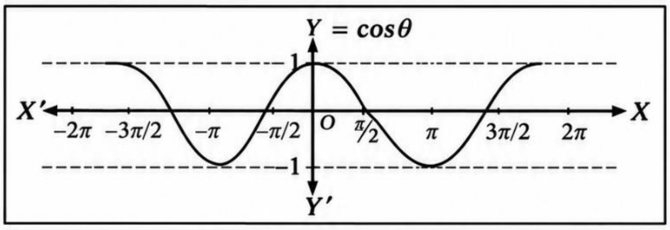
(i) $y = \sin\theta$

आवर्त $= 2\pi$ तथा $\sin\theta$ विषम फलन है।



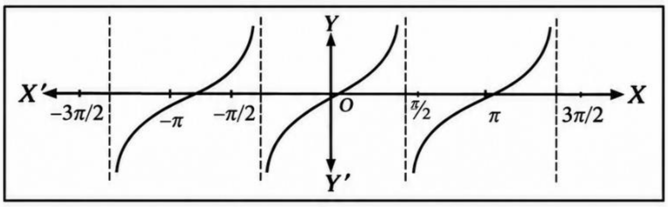
(ii) $y = \cos\theta$

आवर्त $= 2\pi$ तथा $\cos\theta$ सम फलन है।



(iii) $y = \tan\theta$

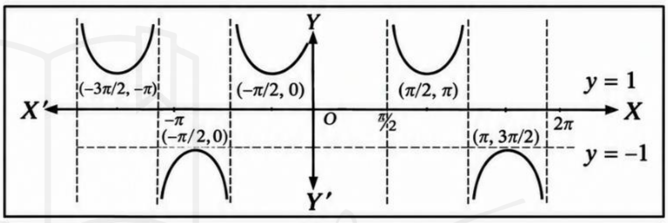
आवर्त $= \pi$ तथा $\tan\theta$ विषम फलन है।



(iv) $y = \text{cosec}\theta$

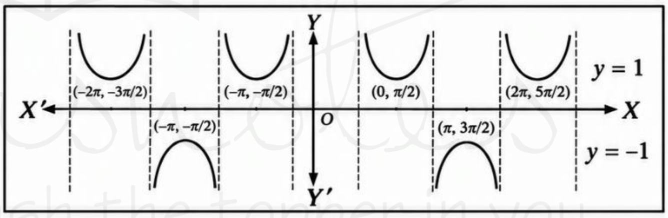
आवर्त $= 2\pi$ तथा $\text{cosec}\theta$ विषम फलन है।

ग्राफ में प्रमुख बिन्दु:



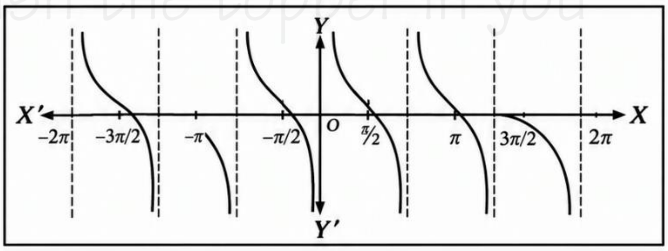
(v) $y = \sec\theta$

आवर्त $= 2\pi$ तथा $\sec\theta$ सम फलन है।



(iv) $y = \cot\theta$

आवर्त $= \pi$ तथा $\cot\theta$ विषम फलन है।



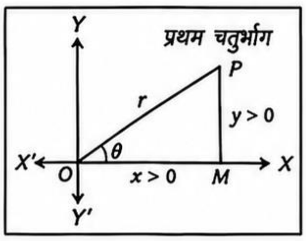
त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिन्ह(Sign for Trigonometrical Ratios in Different Quadrants) :-

त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिन्ह उस चतुर्भाग पर निर्भर करते हैं जिसमें कोण की सीमान्त भुजा स्थित होती है।

प्रथम चतुर्भाग में (In First Quadrant) :- चूँकि प्रथम चतुर्भाग में $x > 0$ तथा $y > 0$ हैं तथा

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

अत:

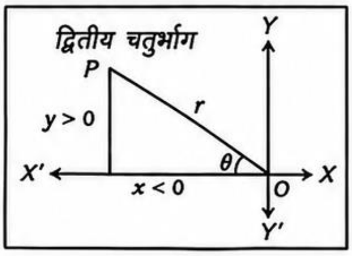


$$\therefore \sin\theta = \frac{y}{r} > 0, \cos\theta = \frac{x}{r} > 0, \tan\theta = \frac{y}{x} > 0$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} > 0, \sec\theta = \frac{r}{x} > 0, \text{cosec}\theta = \frac{r}{y} > 0$$

अतः प्रथम चतुर्भाग में सभी त्रिकोणमितीय अनुपात धनात्मक होते हैं।

द्वितीय चतुर्भाग में (In Second Quadrant):- चूँकि द्वितीय चतुर्भाग में $x < 0$ तथा $y > 0$ हैं तथा



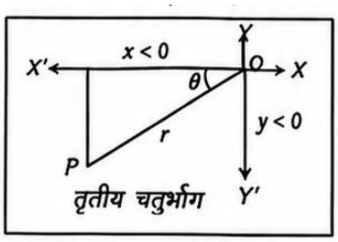
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

अतः,

$$\therefore \sin\theta = \frac{y}{r} > 0, \cos\theta = \frac{x}{r} < 0, \tan\theta = \frac{y}{x} < 0$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y} < 0, \sec\theta = \frac{r}{x} < 0, \text{cosec}\theta = \frac{r}{y} > 0$$

अतः द्वितीय चतुर्भाग में sin और cosec फलन धनात्मक होते हैं तथा अन्य त्रिकोणमितीय फलन ऋणात्मक होते हैं।

तृतीय चतुर्भाग में (In Third Quadrant) :- चूँकि तृतीय चतुर्भाग में $x < 0$, तथा $y < 0$ हैं तथा



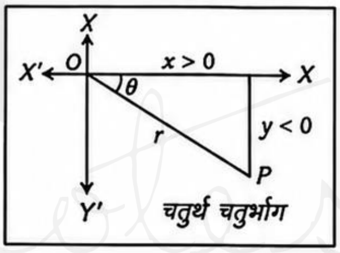
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

अत:

$$\therefore \sin\theta = \frac{y}{r} < 0, \cos\theta = \frac{x}{r} < 0, \tan\theta = \frac{y}{x} > 0$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y} > 0, \sec\theta = \frac{r}{x} < 0, \text{cosec}\theta = \frac{r}{y} < 0$$

अतः तृतीय चतुर्भाग में tan और cot धनात्मक होते हैं और अन्य त्रिकोणमितीय फलन ऋणात्मक होते हैं।

चतुर्थ चतुर्भाग में (In Fourth Quadrant) :- चूँकि चतुर्थ चतुर्भाग में $x > 0$ तथा $y < 0$ हैं तथा



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

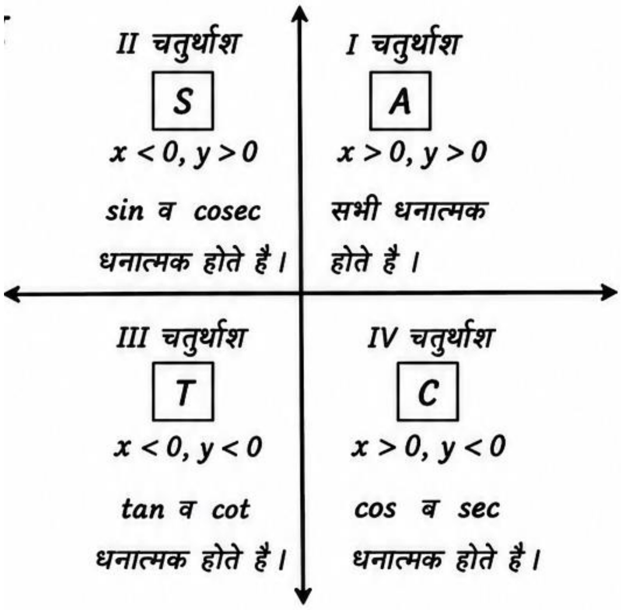
अतः

$$\therefore \sin\theta = \frac{y}{r} < 0, \cos\theta = \frac{x}{r} > 0, \tan\theta = \frac{y}{x} < 0$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y} < 0, \sec\theta = \frac{r}{x} > 0, \text{cosec}\theta = \frac{r}{y} < 0$$

अतः चतुर्थ चतुर्भाग में cos और sec धनात्मक होते हैं और अन्य त्रिकोणमितीय फलन ऋणात्मक होते हैं।

Toppersnotes
Unleash the topper in you

<u>विशिष्ट बिन्दु</u>



विभिन्न चतुर्थांश में त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिन्ह याद रखने का एक स्मरणिक "All Students To Coffee Point" है।

उदाहरण :- यदि $\sec\theta - \sqrt{2}$ और $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ है, तो $\frac{1+\tan\theta+\text{cosec}\theta}{1+\cot\theta-\text{cosec}\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :- दिया है, $\sec\theta - \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

लेकिन चतुर्थ चतुर्भाग में स्थित है जिसमें $\sin\theta$ ऋणात्मक है।

$$\therefore \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{cosec}\theta = -\sqrt{2}$$

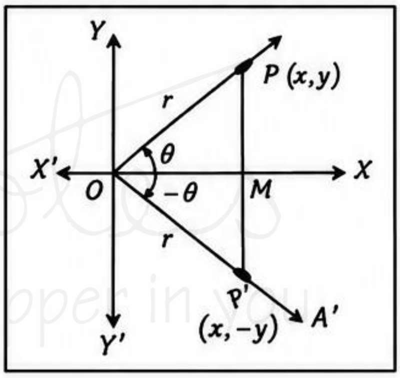
$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = -1$$

$$\Rightarrow \cot\theta = -1$$

$$\therefore \frac{1+\tan\theta+\text{cosec}\theta}{1+\cot\theta-\text{cosec}\theta} = \frac{1-1-\sqrt{2}}{1-1+\sqrt{2}} = -1$$

विभिन्न अपवर्ती कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio for different Allied Angles) :-

योग या कोणों का योग या अन्तर या तो शून्य हो या 90° का गुणक हो, तो कोण अपवर्ती कहलाते हैं।



$(-\theta)$ **के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात** (Trigonometric Ratio for $(-\theta)$)

एक घूर्णन करने वाली रेखा अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ होती है तथा $\angle XOA - \theta$ कोण बनाती है। मान लीजिए एक बिन्दु $P(x, y), OA$ पर इस प्रकार है कि $OP = r$ है। x अक्ष पर P से PM लम्ब खींचिए।

कोण $\angle XOA' - -\theta$ दक्षिणावर्त दिशा में है।

मान तीजिए OA' पर बिन्दु P' इस प्रकार है कि $OP' - OP$ और $\Delta\, OMP$ तथा $\Delta\, OMP'$ आपस में सर्वागसम हैं, तोबिन्दु P' के निर्देशांक $(x, -y)$ होंगे।

$$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\theta$$

$(\mathbf{90^\circ - \theta})$ **के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios for** $(\mathbf{90^\circ - \theta})$ **) :-** मान तीजिए OX से शुरू होने वाली घूर्णित रेखा θ के बराबर कोण बनाकर चलती है। किसी बिन्दु $P(x, y)$ से इस पर PM लम्ब खींचिए। हम जानते हैं कि एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण के योग के बराबर होता है और $\Delta\, OMP$ एक समकोण त्रिभुज है इसलिए दो कोणों MOP व OPM का योग एक समकोण है।

$$\angle OPM - 90^\circ - \theta$$

अत:

$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{MO}{PO} = \cos\theta$

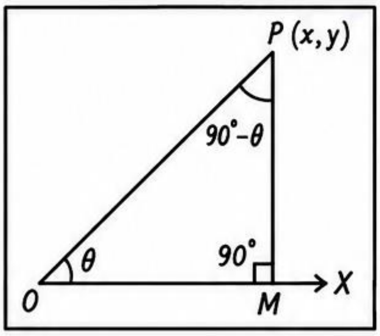
$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{PM}{PO} = \sin\theta$

$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{MO}{PM} = \cot\theta$

$\text{cosec}(90^\circ - \theta) = \frac{PO}{MO} = \sec\theta$

$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{PO}{PM} = \text{cosec}\theta$

$\cot(90^\circ - \theta) = \frac{PM}{MO} = \tan\theta$



यदि $\theta + \phi = 90^\circ$ हो तो

(i) $\sin\theta = \cos\phi$

(ii) $\tan\theta \cdot \tan\phi = 1$

(iii) $\sin^2\theta + \sin^2\phi = 1$

(iv) $\cos^2\theta + \cos^2\phi = 1$

(v) $\text{cosec}^2\theta - \tan^2\phi = 1$

(vi) $\sec^2\theta - \cot^2\phi = 1$

उदाहरण :

(i) $\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ = 1$

(ii) $\cot 1^\circ \cdot \cot 89^\circ = 1$

(iii) $\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ = 1$

(iv) $\cos^2 5^\circ + \cos^2 85^\circ = 1$

(v) $\text{cosec}^2 5^\circ - \tan^2 85^\circ = 1$

(vi) $\sec^2 5^\circ - \cot^2 85^\circ = 1$

उदाहरण: यदि: $\tan\theta \cdot \tan 2\theta - 1$ हो तो $\sin^2 2\theta + \sec^2 2\theta$ का मान होगा।

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{19}{4}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

हल:

$$\tan\theta \cdot \tan 2\theta - 1$$
$$\theta + 2\theta - 90^\circ$$
$$\Rightarrow \theta - 30^\circ$$

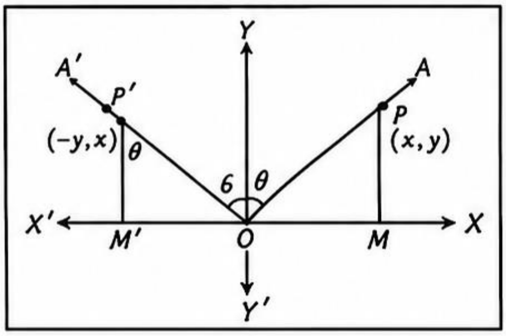
तो, $\sin^2 2\theta + \sec^2 2\theta - \sin^2 60^\circ + \sec^2 60^\circ$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2)^2 = \frac{3}{4} + 4 = \frac{19}{4}$$

$(90^\circ + \theta)$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios for $(90^\circ + \theta)$)

मान लीजिए एक घूर्णन रेखा OA अपनी प्रारंभिक स्थिति OX से प्रारंभ होकर एक कोण $\angle XOA = \theta$ बनाती है। फिर अत्य रेखा OA' समान प्रारंभिक स्थिति OX से प्रारंभ होकर पूर्ववत् एक कोण θ बनाती है जिससे OA के समापाती दिशा और यह घूर्णन रेखा में एक कोण $\angle XOA' = 90^\circ + \theta$ बनाने के लिए 90° से घूमती है।

मान लीजिए बिन्दुओं P तथा P' क्रमशः OA तथा OA' पर इस प्रकार स्थित है कि $OP = OP' = r, OX$ पर P व P' से क्रमशः लम्ब PM व PM' खींचे। तब लीजिए P के निर्देशांक (x, y) हैं तो $OM = x$ और $PM = y, OM' = OM = x$ तथा $PM' = PM = y$, इसलिए P' के निर्दशांक $(-y, x)$ हैं।



$$\sin(90° + \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$
$$\cos(90° + \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$
$$\tan(90° + \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{x}{y} = \cot\theta$$
$$\text{cosec}(90° + \theta) = \frac{r}{x} = \sec\theta$$
$$\sec(90° + \theta) = \frac{r}{y} = -\text{cosec}\theta$$
$$\cot(90° + \theta) = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

$\pi - \theta, \pi + \theta, \frac{3\pi}{2} - \theta, \frac{3\pi}{2} + \theta, 2\pi - \theta$ तथा $2\pi + \theta$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात निम्नवत् होंगे।

त्रिकोणमितीय अनुपात	$(-\theta)$	$(90° - \theta)$ या $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$(90° + \theta)$ या $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$	$(180° - \theta)$ या $(\pi - \theta)$	$(180° + \theta)$ या $(\pi + \theta)$	$(270° - \theta)$ या $\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$	$(270° + \theta)$ या $\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$	$(360° - \theta)$ या $(2\pi - \theta)$
$\boldsymbol{\sin\theta}$	$-\sin\theta$	$\boldsymbol{\cos\theta}$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$\boldsymbol{-\cos\theta}$	$\boldsymbol{-\cos\theta}$	$-\sin\theta$
$\cos\theta$	$\boldsymbol{\cos\theta}$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\boldsymbol{-\cos\theta}$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\boldsymbol{\cos\theta}$
$\tan\theta$	$\boldsymbol{-\tan\theta}$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$\boldsymbol{-\tan\theta}$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$\boldsymbol{-\tan\theta}$

आधारमूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Fundamental Trigonometrical identities) :-

Unleash the topper in you

आधार भूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकॉएं इस प्रकार है

(a) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(b) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

(c) $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

उदाहरण :- सिद्ध कीजिए $\sin^4\theta + \cos^4\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$

हल :- बायाँ पक्ष $= \sin^4\theta + \cos^4\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$$= \sin^4\theta + \cos^4\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 = 1^2 = 1 = \text{ दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण :- सिद्ध कीजिए $\sin^4\theta - \cos^4\theta = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta)$

हल :- बायाँ पक्ष $= (\sin^4\theta - \cos^4\theta) = (\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2$

$$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)((\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta)$$
$$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\big((1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta)\big) = \text{ दायाँ पक्ष}$$

दो कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के योग तथा अन्तर के सूत्र

(Formulae of the Trigonometrical Ratios for sum and Difference for Difference for Two Angles) :-

(i) $\sin(A+B) - \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(ii) $\sin(A-B) - \sin A\cos B - \cos A\sin B$

(iii) $\cos(A+B) - \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(iv) $\cos(A-B) - \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(v) $\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(vi) $\tan(A-B) = \frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

(vii) $\cot(A+B) = \frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$

(viii) $\cot(A-B) = \frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

(ix) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$

(x) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

(xi) $\tan A \pm \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} \pm \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A\cos B \pm \cos A\sin B}{\cos A\cos B} = \frac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B}\left(A \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, B \neq m\pi\right)$

(xii) $\cot A \pm \cot B = \frac{\sin(B\pm A)}{\sin A\sin B}\left(A \neq n\pi, B \neq m\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

उदाहरण :- सिद्ध कीजिए $\frac{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ} = \tan 55^\circ$

बायाँ पक्ष $= \frac{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{1+\tan 10^\circ}{1-\tan 10^\circ}$

$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 10^\circ} = \tan(45^\circ + 10^\circ)$

$= \tan 55^\circ$ दायाँ पक्ष

उदाहरण :- सिद्ध कीजिए $\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} + \frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} = 0$

हल :- बायाँ पक्ष का प्रथम पद

$$= \frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} = \frac{\sin B\cos C - \cos B\sin C}{\cos B\cos C}$$
$$= \tan B - \tan C$$

इसी प्रकार द्वितीय पद $= \tan C - \tan A$

तथा तृतीय पद $= \tan A - \tan B$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= (\tan B - \tan C) + (\tan C - \tan A) + \tan A - \tan B = 0$

$=$ दायाँ पक्ष

त्रिकोणमितीय अनुपातों के योग या अन्तर को गुणनफल में रूपान्तरित करने वाले सूत्र

(Formulae for Transformation of sum or Difference of Trigonometrical Ratios into Product) :-

हम जानते हैं कि

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B \ldots\ldots (i)$$

मान लीजिए $A + B = C$ तथा $A - B = D$

तब $A = \frac{C+D}{2}$ तथा $B = \frac{C-D}{2}$

समी (i) में रखने पर

(i) $\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

इसी प्रकार , अन्य सूत्र

(ii) $\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ (iii) $\cos C + \cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

(iv) $\cos C - \cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$

उदाहरण :- सिद्ध कीजिए $\cos 55° + \cos 65° + \cos 175° = 0$

हल :- बायाँ पक्ष $= \cos 55° + \cos 65° + \cos 175°$

$$= 2\cos 60°\cos(-5°) + \cos 175°$$
$$= 2 \times \frac{1}{2}\cos 5° + \cos(180° - 5°)$$
$$= \cos 5° - \cos 5°$$
$= 0 =$ दायाँ पक्ष

<u>त्रिकोणमितीय अनुपातों की गुणा को योग या अन्तर में परिवर्तित करने वाले सूत्र</u>

(Formulae for Transformation of Product of Trigonometrical Ratios into sum or Difference)

हम जानते हैं, कि

$$\sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin(A+B) \ldots (i)$$
$$\sin A\cos B - \cos A\sin B = \sin(A-B) \ldots (ii)$$
$$\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A+B) \ldots (iii)$$
$$\cos A\cos B + \sin A\sin B = \cos(A-B) \ldots (iv)$$

समी (i) व (ii) को जोड़ने पर

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

समी (i) में से (ii) को घटाने पर

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

समी (iii) व (iv) को जोड़ने पर

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

समी (iv) सें से (iii) को घटाने पर

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

सूत्र (Formulae)

(i) $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

(ii) $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

(iii) $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

(iv) $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

उदाहरण :- $\sin\frac{\pi}{16}\cdot\sin\frac{3\pi}{16}\cdot\sin\frac{5\pi}{16}\cdot\sin\frac{7\pi}{16}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :- $\sin\frac{\pi}{16}\cdot\sin\frac{3\pi}{16}\cdot\sin\frac{5\pi}{16}\cdot\sin\frac{7\pi}{16} = \frac{1}{4}\left[2\sin\frac{\pi}{16}\cdot\sin\frac{3\pi}{16}\left[2\sin\frac{5\pi}{16}\cdot\sin\frac{7\pi}{16}\right]\right.$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\left(\cos\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\cos^2\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\right)\left(-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)\right] = \frac{1}{8}\left[\cos^2\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{8} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

कुछ विशेष कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios for Some Special Angles) :-

$\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \tan 15^\circ, \sin 75^\circ, \cos 75^\circ, \tan 75^\circ$ के मान निम्न हैं ।

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

तथा $\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

इसी प्रकार $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ लिख कर सकते है।

अब $\sin 75^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

तथा

$$\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

और

$$\tan 75^\circ = \tan(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$$

अपवर्त्य तबा अपवर्तक कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonametrical Ratios for Multiple and Submultiple Angles) :-

अपवर्त्य कर्णो के लिए दिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios for Mailtiple of an Angle) :-

(i) $\sin 2A = 2 \sin \mathrm{A} \cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = 2\cos^2 A - I = 1 - 2\sin^2 A = \cos^2 A - \sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{I-\tan^2 A}$

(iv) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
$= 4\sin(60^\circ - A)\sin A \sin(60^\circ + A)$

(v) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A = 4\cos(60^\circ - A)\cos A \cos(60^\circ + A)$

(vi) $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A} = \tan(60^\circ - A)\tan A \tan(60^\circ + A), A \neq n\pi + \frac{\pi}{6}$

अपवर्तक कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios for submultiple of an Angle)

i. $\left|\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right|=\sqrt{1+\sin A}$ ar $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}$

ii. $\left|\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right|=\sqrt{1-\sin A}$ ar $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}$

iii. $\tan\frac{A}{2}=\pm\frac{\sqrt{\tan^2 A+1}-1}{\tan A}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\frac{1-\cos A}{\sin A}, A\neq(2n+1)\pi$

iv. $\cot\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}=\frac{1+\cos A}{\sin A}, A\neq 2n\pi$

v. $\tan\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}, A\neq(2n+1)\pi$

vi. $\cot\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{1-\cos A}, A\neq 2n\pi$

sin और cos बेणीओ का योग (जब कोण समान्तर क्षेणी में है) (Sum of sin and cos series (When Angles are in AP))

(i) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\ldots+n$ पदो कक $=\frac{\sin\left[\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}, \beta\neq 2n\pi$

(ii) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\ldots+n$ पदो तक $=\frac{\cos\left[\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}, \beta\neq 2n\pi$

प्रतिबम्भित सर्वसमिकाएँ (Conditional Identities)

1. **sines तथा cosines कोणों के गुणन के लिए सर्वसमिकाएँ (Identities for Multiple angles of Sines and Cosines)**

   a) यदि $A+B+C=180^\circ$, तब

   (i) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

   (ii) $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A\cos B\sin C$

   (iii) $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)=4\sin A\sin B\sin C$

   (iv) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

   (v) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A\sin B\cos C$

   b) यदि $A+B+C=180^\circ$, तब

   (i) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

   (ii) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

   (iii) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

   (iv) $\cos A+\cos B-\cos C=-1+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

2. **sines तथा cosines कोणों के बर्गों के गुणज के लिए सर्वसमिकाई (Identities for Square of angles of Sines and Cosines)**

   a) यदि $A+B+C=\pi$ तब

   (i) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C$

   (ii) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

   (iii) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1-2\sin A\sin B\cos C$

b) यदि $A+B+C=\pi$ तब

(i) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(ii) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(iii) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=1-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(iv) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) यदि $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, तब

(i) $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1-2\sin \mathrm{x}\sin \mathrm{y}\sin z$

(ii) $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=2+2\sin \mathrm{x}\sin \mathrm{y}\sin z$

3. Tangents तथा Cotangents कोणों के गुणज के लिए सर्वसमिकाएँ (Identities for Multiple of angles of Tangents and Cotangents)

a) यदि $A+B+C=\pi$, तब

(i) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan \mathrm{A}\tan \mathrm{B}\tan C$

(ii) $\cot \mathrm{B}\cot C+\cot \mathrm{C}\cot A+\cot \mathrm{A}\cot B=1$

(iii) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$

(iv) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}p$

($\mathbf{a}\cos\theta+\mathbf{b}\sin\theta$) का महत्तम् तथा न्यूनतम मान (Maximum and Minimum Value of $\mathbf{a}\cos\theta+\mathbf{b}\sin\theta$)

मान लीजिए $a=r\sin\alpha \ldots (i)$

$b=r\cos\alpha \ldots (ii)$

समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोदने पर

$$a^2+b^2=r^2$$
$$\Rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\therefore a\cos\theta+b\sin\theta$$
$$=r(\cos\theta\sin\alpha+\sin\theta\cos\alpha)$$
$$=r\sin(\theta+\alpha)$$

लेकि $-1\le\sin\theta\le 1$

$$\Rightarrow\ -1\le\sin(\theta+a)\le 1$$
$$\Rightarrow\ -r\le r\sin(\theta+a)\le r$$
$$\Rightarrow\ -\sqrt{a^2+b^2}\le a\cos\theta+b\sin\theta\le\sqrt{a^2+b^2}$$

अत: $\mathrm{a}\cos\theta+\mathrm{b}\sin\theta$ के अधिकतम और न्यूनतम मान क्रमशः

$\sqrt{a^2+b^2}$ तथा $-\sqrt{a^2+b^2}$ है।

उदाहरण :- $5\cos\theta+3\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+3$ का अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल :- मानक $= 5\cos\theta + 3\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 3$

$$= 5\cos\theta + 3[\cos\theta\cos 60^\circ - \sin\theta\sin 60^\circ] + 3$$

$$= 5\cos\theta + 3\left[\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right] + 3$$

$$= \frac{1}{2}[13\cos\theta - 3\sqrt{3}\sin\theta] + 3$$

अत: व्यंजक का अधिकान व न्यूनतम मान $(7 + 3)$ और $(-7 + 3)$ है। अर्थान् क्रमशः 10 तथा -4 है।

त्रिकोणमितीय फलनों के आकर्तकाल (Period of Trigonometrical Functions) :-

फलन $f(x)$ को आर्त्ती फ़्तन कहते है यदि एक न्यूनतम बनात्मक वास्तविक संख्या T इस प्रकार है कि

$$f(x + T) = f(x)$$

T को फलन $f(x)$ का आवर्त कहते है । स्पर है कि यदि T, फलन $f(x)$ का आर्वतं है तो

$$f(x + T) = f(x + 2T) = f(3 + 3T) = \cdots$$

विशिष्ट बिन्दु

i) यदि दो आवर्ती फलनों $f_1(x)$ और $f_2(x)$ के आवर्त क्रमशः (मान T) हो, तो फलन $af_1(x) + bf_2(x)$, जही a और b कोई दो तब्चाई है वी आवर्ती फलन है और इसका आवर्त की T होगा।

ii) यदि T आकती फलन $f(x)$ का आवर्त है तो फलन $f(ax + b)$, जहीं a और b कोई दो सख्याएँ है शी अपर्ती फलन है और द्यक्त आवर्त $\frac{T}{|a|}$ होता है।

iii) बदि T_1 और T_2 कमशः आवर्ती फलनों $f_1(x)$ तोर $f_2(x)$ के आवर्त है, तो फलन $af_1(x) + bf_2(x)$, जहाँ a और b कोई दो संख्या? है, मी आवर्ती फलन है और इसका आवर्त T होता है जो T_1 और T_2 का ल. स. हो।

उदाहरण :- $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ का आवर्त ज्ञात कीजिए।

हल :- व्यंजक $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

अत: आवर्ष $= 2\pi$

कुष्ठ विशेष त्रिकोणमितीय फलनों के आवर्तकाल (Period of Some Special Trigonometrical Ratios):-

त्रिकोणमितीय फलन	अनवर्त
$\sin^n x, \cos^n x, \text{cosec}^n x$	π, यदि n तन है। 2π, यदि n विषम या निम्न है ।
$\tan^n x, \cot^n x$	π, यदि n सम या विषम है ।
$\sin(ax + b), \cos(ax + b), \sec(ax + b), \text{cosec}(ax + b)$	$\frac{2\pi}{a}$
$\tan(ax + b), \cot(ax + b)$	$\frac{\pi}{a}$
$\|\sin x\|, \|\cos x\|, \|\tan x\|, \|\cot x\|, \|\sec x\|, \|\text{cosec} x\|$	π
$\|\sin(ax + b)\|, \|\cos(ax + b)\|, \|\sec(ax + b)\|, \|\text{cosec}(ax + b)\|$	$\frac{\pi}{a}$
$\|\tan(ax + b)\|, \|\cot(ax + b)\|$	$\frac{\pi}{a}$

त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometrical Equations)

त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometrical Equations) :- वे समीकरण जिनमे अज्ञात कोण के एक या एक से अधिक त्रिकोणमितीय फलन होते है त्रिकोणमितीय समीकरण कहलाते है।

जैस :- $\sin x+\cos 2x=1, \cos\theta-4\cos^2\theta=1$ इत्यादि ।

त्रिकोणमितीय समीकरण के हल (Solution of Trigonometrical Equations) :-

अज्ञात कोण (एक चर राशि) का वह मान जो दिए गए त्रिकोणमितीय समीकरण को संतुष्ट करे, समीकरण का हल कहलाता है। उदाहरणार्थ $\cos x=\frac{1}{2}$ का हल $x=60^\circ$ या $x=300^\circ$ है क्याँकि ये दोनों मान समीकरण को संतुष्ट करते है।

a) **विशिष्ट हल (Particular Solution):-** अज्ञात कोण का विशेष मान जो समीकरण को संतुष्ट करता है विशिष्ट हल कहलाता है।

b) **मुख्य हल (Principal solution):-** त्रिकोणमितीय समीकरण को संतुष्ट करने वाले अज्ञात कोण के न्यूनतम मान को मुख्य हल कहते है।

c) **व्यापक हल (General Solution):-** अज्ञात कोण के सभी मानो का समुच्चय जो समीकरण को संतुष्ट करता है व्यापक हल कहलाता है। व्यापक हल में सभी विशिष्ट हल तथा मुख्य हल सम्मिलित होते है।

उदाहरण :- यदि $\sin\theta+\cos\theta=1$ हो, तो θ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए ।

हल :- चूँकि $\sin\theta+\cos\theta=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ ($\sqrt{2}$ से गुणा करने पर)

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\theta+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta=0$$

त्रिकोणमितीय समीकरणों के व्यापक हल (General Solution of Trigonometrical Equations) :-

त्रिकोणमितीय समीकरणों $\sin\theta=k, \cos\theta=k$ और $\tan\theta=k$ के व्यापक हल (General Solutions of Trigonometrical Equations $\sin\theta=k, \cos\theta=k$ and $\tan\theta=k$)

a) **समीकरण $\sin\theta=k$ के व्यापक हल $(-1\le k\le 1)$ (General Solution of Equation $\sin\theta=k$) :- मान लीजिए $-1<k<1, k\ne 0$ है। तब इस स्थिति में α तथा $\pi-\alpha$ के रुप वाले θ के दो मान होने चाहिए, जहाँ $0\le\theta\le 2\pi$ में ये जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करते है।**

$2\pi r(r\in I)$ जोड़ने पर $2\pi r+\alpha$ तथा $(2r+1)\pi-\alpha$ हल प्राप्त होते है।

ये दोनों हल $n\pi+(-1)^n\alpha, n\in I$ में सम्मिलित है ।

जहाँ 1 पूर्णाक का समुच्चय है। अतः इस स्थिति में व्यापक हल निम्न है।

$\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$ जहाँ $n\in I$ अर्थातु $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\ldots$

विशेष स्थिति में, जब $k=0$, तब $\sin\theta=0=\sin 0^\circ$

$\therefore\ \theta=n\pi$

$k=1$ के लिए, $\theta=(4n+1)\frac{\pi}{2}, n\in I$

तथा $k = -1$ के लिए,

$$\theta = (4n+3)\frac{\pi}{2}, n \in I$$

b) समीकरण $\cos\theta = k$ के लिए व्यापक हल $(-1 \le k \le 1)$ (General Solution of Equation $\cos\theta = k$):-

मान लीजिए $-1 < k < 1, k \neq 0$ है तब इस स्थिति में $\pm\alpha$ के रूप वाले θ के दो मान होंगे जो अंतराल

$$-\pi < \theta \le \pi$$

में हैं जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। अतः इस स्थिति में व्यापक हल निम्न होगा।

$$\theta = 2n\pi \pm \alpha, n \in I$$

विशेष स्थिति में, जब $k = 0$ तब $\cos\theta = 0 = \cos 90°$

$$\theta = 2n\pi \pm \pi/2 \text{ या } \theta = \frac{(4r\pm1)\pi}{2(r\in I)}$$

इस प्रकार इस स्थिति में हल समुच्चय $\frac{\pi}{2}$ के सभी विषम गुणज (Odd multiples) होंगे। अतः हल निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$\theta = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

या

$$\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in I$$

तथा $k = 1$ के लिए

$$\theta = 2n\pi, n \in I$$

और $k = -1$ के लिए

$$\theta = (2n+1)\pi, n \in I$$

c) समीकरण $\tan\theta = k$ के व्यापक हल $(-\infty < k < \infty)$ **(General Solution of Equation $\tan\theta = k$):-**

k के किसी भी वास्तविक मान के लिए α और $\pi + \alpha$ के रूप के दो मान होते हैं। जो अंतराल $0 \le \theta < 2\pi$ में हैं और जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। 2π जोड़ने पर हमें $2\pi + \alpha$ और $(2r+1)\pi + \alpha, r \in I$ प्राप्त होते हैं। ये दोनों हल निम्नलिखित हल में सम्मिलित हैं।

$$\theta = n\pi + \alpha, n \in I$$

विशेष स्थिति में यदि $k = 0$ तो हल $\theta = n\pi$ होगा।

उदाहरण :- (i) $\sin 2\theta = 0$ (ii) $\sin^2 2\theta = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल :- हम जानते हैं कि $\sin\theta = 0$ तब $\theta = n\pi$

(i) $\sin 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = n\pi, n \in I$

$$\theta = \frac{n\pi}{2}, n \in I$$

(ii) चूँकि $\sin^2 2\theta = \frac{1-\cos 4\theta}{2}$

$$\therefore \cos 4\theta = 1 = \cos 0°$$

$$\Rightarrow 4\theta = 2n\pi \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{2}, n \in I$$

त्रिकोणमितीय समीकरणों $\sin\theta = \sin\alpha, \cos\theta = \cos\alpha$ तथा $\tan\theta = \tan\alpha$ के व्यापक हल

(General Solution of Trigonometrical Equations $\sin\theta = \sin\alpha, \cos\theta = \cos\alpha$ and $\tan\theta = \tan\alpha$

a) समीकरण $\sin\theta = \sin\alpha$ के व्यापक हल (General Solution of Equation $\sin\theta = \sin\alpha$) :-

यदि

$$\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \sin\theta - \sin\alpha = 0$$
$$\Rightarrow 2\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0$$
$$\therefore \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0 \text{ अथवा } \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0$$
$$\therefore \frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi, n \in I \text{ अथवा } \frac{\theta+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I$$
$$\theta = 2n\pi + \alpha, n \in I \text{ अथवा } \theta = (2n+1)\pi - \alpha, n \in I$$

हाँ, केवल OCR text दे रहा हूँ- image नहीं।

$\theta = (\pi$ का कोई समगुणज$) +\alpha$ अथवा $\theta = (\pi$ का कोई वेषमगुणज$) -\alpha$

$$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha, n \in I$$

विशिष्ट बिन्दु

समीकरण $\text{cosec}\theta = \text{cosec}\alpha, (\theta, \alpha \neq 0)$, समीकरण $\sin\theta = \sin\alpha$ के तुल्य हैं, अतः दोनों समीकरणों के व्यापक हल समान होंगे।

b) समीकरण $\cos\theta = \cos\alpha$ के व्यापक हल (General Solution of Equation $\cos\theta = \cos\alpha$)

यदि

$$\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \cos\theta - \cos\alpha = 0$$
$$\Rightarrow -2\sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$$
$$\therefore \sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0 \text{ अथवा } \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi, n \in I \text{ अथवा } \frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi, n \in I$$
$$\theta = 2n\pi - \alpha, n \in I \text{ अथवा } \theta = 2n\pi + \alpha, n \in I$$

तब $\cos\theta = \cos\alpha$ का व्यापक हल इन दोनों परिणामों को संयुक्त करने पर

$$\theta = 2n\pi \pm \alpha, n \in I$$

विशिष्ट बिन्दु

समीकरण $\sec\theta = \sec\alpha\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$ समीकरण $\cos\theta = \cos\alpha$ के तुल्य है अतः इन दोनों समीकरणों का व्यापक हल समान होगा।

c) समीकरण $\tan\theta = \tan\alpha$ का व्यापक हल (General Solution of Equation $\tan\theta = \tan\alpha$)

यदि

$$\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\Rightarrow \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha = 0$$
$$\Rightarrow \sin(\theta - \alpha) = 0$$
$$\therefore \theta - \alpha = n\pi, n \in I$$
$$\Rightarrow \theta = n\pi + \alpha, n \in I$$

विशिष्ट बिन्दु :-

समीकरण $\cot\theta = \cot\alpha, (\theta, \alpha \neq 0)$ समीकरण tar ↓= $\tan\alpha$ के तुल्य है। अतः इन समीकरणों के समान हल होंगे।

उदाहरण :- x के मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिसके लिए $\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1+\tan 3x \tan 2x} = 1$ है।

हल :- चूँकि

$$\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1 \Rightarrow \tan(3x - 2x) = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

परन्तु $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ के लिए $\tan 2x$ परिभाषित है। अतः दी गई समीकरण को संतुष्ट करने वाले x के मान का समुच्चय ϕ है।

त्रिकोणमितीय समीकरणों के वर्ग के व्यापक हल (General Solution of Square of Trigonometrical Equations):-

समीकरण $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$ का व्यापक हल (General Solution of Equation $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$):-

चूँकि $\sin\theta$ के मान $\pm\sin\alpha$ है और $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ । इसलिए $\theta = \pm\alpha, \pi \pm \alpha$ होगा।

$2\pi r$ जोड़ने पर हमें $2\pi r \pm \alpha$ तथा $(2r+1)\pi \pm \alpha$ प्राप्त होते हैं। ये दोनों हल $n\pi \pm \alpha, (n \in I)$ में सम्मिलित हैं। अतः इस स्थिति में व्यापक हल निम्न प्रकार दिया जाता है।

$\theta = n\pi \pm \alpha$ लेकिन $\sin^2\theta = 1$ के लिए, $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$

इसी प्रकार समीकरण $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ का व्यापक हल $\theta = n\pi \pm \alpha$ है तथा समीकरण $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ का हल $\theta = n\pi \pm \alpha$ द्वारा दिया जाता है।

त्रिकोणमितीय समीकरणों के व्यापक हल का सारांश (Summary of General Solution of Trigonometrical Equations)

क्र. स.	त्रिकोणमितीय समीकरण	व्यापक हल
1	$\sin\theta = 0$	$\theta = n\pi, n \in I$
2	$\cos\theta = 0$	$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I$
3	$\tan\theta = 0$	$\theta = n\pi, n \in I$
4	$\sin\theta = \sin\alpha$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha, \alpha \in \left[-,\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}\right], n \in I$
5	$\cos\theta = \cos\alpha$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha, \alpha \in [0, \pi], n \in I$
6	$\tan\theta = \tan\alpha$	$\theta = n\pi + \alpha, \alpha \in \left(-,\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}\right), n \in I$
7	$\sin^2\theta = \sin^2\alpha \cos^2\theta = \cos^2\alpha \tan^2\theta = \tan^2\alpha$	$\theta = n\pi \pm \alpha, n \in I$
8	$\sin\theta = 1$	$\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I$
9	$\cos\theta = 1$	$\theta = 2n\pi, n \in I$
10	$\cos\theta = -1$	$\theta = (2n+1)\pi, n \in I$
11	$\sin\theta = \sin\alpha \cos\theta = \cos\alpha$	$\theta = 2n\pi + \alpha$
12	$\sin\theta = \sin\alpha \tan\theta = \tan\alpha$	$\theta = 2n\pi + \alpha$
13	$\tan\theta = \tan\alpha \cos\theta = \cos\alpha$	